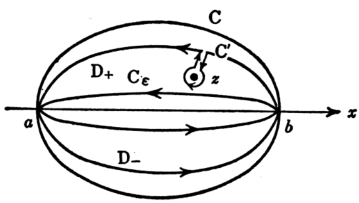
応用超関数論 I

今井　功 著



サイエンス社

は し が き

Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ が理工学の各分野に登場してからすでに久しい．しかし，“$\delta(x)$ は本当の意味で‘関数’ではない，厳密には‘超関数’として扱うべきだ”と数学者にいわれると，δ 関数を使うのになにかうしろめたい気がする．それでは超関数を勉強しようということになるが，これがなかなか難物である．まず，準備として，関数空間とか汎関数などの知識が要求される．このような基礎知識なしでは超関数はわからないのだろうかと嘆息するのはあながち著者のみではないだろう．

Schwartz の「超関数論」にさじを投げかけたころ，著者の目に触れたのが Lighthill の「Fourier 解析と超関数」であった．これは超関数を関数列の極限として把握するもので，古典的な解析学の知識しかない著者にもよくわかる．とくに，超関数を使う具体的な計算がふつうの微積分なみにできるのがありがたい．そのころ，佐藤幹夫氏によって hyperfunction という素晴しいものが提唱されているということを耳にした．これは超関数を‘解析関数の境界値’としてとらえるというもので，流体力学を研究している著者には　超関数＝渦層　というイメージがすぐ浮ぶのである．この考えに基づいて Lighthill の著書を手本に超関数論を構成すれば，専門の数学者でなくても超関数が使えるようになるのではなかろうか．このような考えで「数理科学」（サイエンス社発行）に「流体数学のすすめ II．超関数論」の連載をはじめたのが 1975 年 8 月であった．途中 1 年足らずの休載期間があったが，1979 年 2 月，26 回で連載は完結した．著者が大阪大学基礎工学部に勤務していた 3 年間にほぼ相当する期間である．その内容の一部は大阪大学基礎工学部，大阪府立大学工学部，工学院大学，Cornell 大学航空宇宙科学教室などで講義した．その経験をとり入れて連載記事を整理してできたのが本書である．

書名を「応用超関数論」としたのは，理工学の諸問題に応用できる超関数論を目指したからで，applied というより，むしろ applicable というべきものである．予備知識としては，関数論の初歩的な部分を期待するが，大学学部の物理数学あるいは応用数学で学ぶ程度のもので十分である．

第 1 章では，佐藤の超関数が流体力学でおなじみの渦層として直観的にとらえられることを述べ，このイメージを基礎にして超関数論を構成しようという

本書の目標を説明する．第2章では，超関数に関する基本的事項として，超関数の値，四則演算，微分，積分などを定義する．また，ふつうの関数を超関数に見直す操作と，逆に超関数をふつうの関数にひきもどす操作が説明される．

第3章では，超関数についての偶奇性，虚実性，形式積の概念を導入する．基本的な超関数として，ベキ型の超関数が定義される．第4章では，パラメーターを含む超関数 $f(x,\alpha)$ を考える．すなわち，α についての極限，微分，積分などの演算が具体的にとり扱われる．また，発散積分に対する Cauchy の主値や Hadamard の有限部分が超関数の積分として統一的に議論できることが示される．

以上で，ふつうの関数について行なわれる各種の計算がそのまま超関数のばあいにも適用できるようになる．

第5章から第9章までは Fourier 変換の議論である．まず，第5章では超関数の Fourier 変換の一般論が展開され，第6章ではベキ型超関数の Fourier 変換が具体的に求められる．第7章では上・下型超関数，左・右超関数の概念が導入される．第8章では，Fourier 変換が存在するための十分条件と，Fourier 変換の正則性について議論する．さらに，第9章では，Fourier 変換 $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ の $\xi\to\pm\infty$ での漸近的性質を調べる．実用上現われる関数あるいは超関数は以上の議論でほぼ完全におおわれる．

第10章では，まず，一般的に標準母関数の概念を導入し，これに基づいて周期超関数を扱う．任意の周期超関数が Fourier 級数として表わされることが示される．これによって Fourier 級数が Fourier 変換の理論に吸収されることになる．

第11章では，超関数について解析接続と一致の定理を述べる．また，1点および区間への射影という概念を導入する．これによって，超関数の定義区間が無限区間 $(-\infty,\infty)$ に拡張され，ふつうの関数を超関数に見直す操作が統一的に与えられる．第12章では，2つの超関数が特異点を共有しないばあい，およびともに上（下）型の超関数であるばあいについて，積が合理的に定義される．

第13章では超関数のたたみこみを一般的に議論し，つづく第14章では特別なばあいとして周期超関数のたたみこみをとり上げる．さらに，たたみこみの重要な特別のばあいとして，第15章では Hilbert 変換について詳細にとり扱う．Hilbert 変換が応用上重要であることを考えたからである．これに関連し

て，第16章では Poisson–Schwarz の積分公式を種々のばあいについて与える．これらの公式はある種の積分方程式の解法に利用される．

第17章では，たたみこみ型の積分方程式について，超関数による解法を説明する．最後の第18章では，Laplace 変換の理論が超関数論により Fourier 変換の理論に吸収されることを示す．

超関数をふつうの関数のように使いこなせるものにしたい．これを目標として，本書では実例計算を多数行なった．その結果得られた諸公式は，実際問題への応用の際の便宜を考えて，II巻の巻末に付録として掲載することにした．超関数のたたみこみ，Fourier 変換，Hilbert 変換の諸公式の多くは他の書物に見られないものと思う．

定理，定義，例，式，図は各章ごとに通し番号をつけた．他の章の定義，式などはたとえば定義5.6，式(14.3.6)のように引用する．これらは，5章の定義6，14章の式(3.6)の意味である．

補題，系とすべきものも，引用の便を考慮して，すべて定理とした．用語や記号も，直観的にわかりやすいことや計算の際の便宜を考えて，自分勝手なものを使った．母関数，上(下)型超関数，…などや，H.F.，G.F.，O.F.，… などである．

本書は Lighthill 教授の明快な著書と佐藤教授の独創的な着想に触発されて生まれた．ここに両教授に対して深甚な謝意を表したい．また，東大退官後の3年間を本書の構想に割くことを許して下さった阪大基礎工学部のかつての同僚諸氏の御好意に厚く感謝する．最後に，連載期間中怠り勝ちの著者を暖かく励まされた数理科学社の村松武司氏と，本書の出版にあたりいろいろお世話になったサイエンス社の橋元淳一郎，弦間和男の両氏に感謝する．

1981年4月

今井　功

第I巻　目　次

第Ⅱ巻内容

1 序　　説

§1. 超関数とは

Diracのデルタ関数 $\delta(x)$ については，読者諸氏もすでによくご承知のことと思う．$\delta(x)=0\ (x\neq0)$ で，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$ となるような関数である．直観的にいうと，$\delta(0)=\infty$ でなければこのようなことはあり得ない．また，任意の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$$

であるという．物理学者や工学者は δ 関数を重宝な道具として利用するけれども，数学者にいわせると，そんな関数はあり得ない．ところが，物理屋は

$$x\delta(x)=0$$

としたり，さらにこれを微分して

$$x\delta'(x)+\delta(x)=0 \qquad \therefore\quad x\delta'(x)=-\delta(x)$$

などの性質があるという．そもそも $\delta(x)$ なる関数は存在しないのに，その導関数 $\delta'(x)$ を考えるとはなにごとか，と数学者は非難する．この非難には正面から答えることはできないまま，物理屋は，とにかく役に立つから使うのだ，と開き直ることになる．このような状態は **L. Schwartz の超関数** (distribution) の出現によって一変した．δ 関数が超関数として数学的に完全に基礎づけられるというのである．

超関数論の確立によってSchwartzが1950年度のFields賞を受賞したということもあずかって，著者の仲間のあいだでも，これを勉強しなければ……といった気分がわいてきた．原著の "*Théorie des distributions*" の輪講をはじめているうちに，岩村聯氏の翻訳「超函数の理論」(岩波書店，1953年) が出版されたので，それに乗り替えた．しかし，数学の基礎的な素養のない著者たちにはよくわからないのである．わからないながらも，一応読み通したことは確かである．いま本を開いてみると読了の印がついているから．

超関数へのあこがれを抱きながら，この輪講の後は縁切れの状態であったが，

M.J. Lighthill の “*An introduction to Fourier analysis and generalized functions*” (Cambridge Univ. Press, 1958) に接して，また改めて超関数の勉強をはじめようということになった. Lighthill は理論流体力学では現在最高峰と目される大家で，高速気流，境界層，波動，電磁流体力学，生物の運動，……と広い分野で顕著な業績を挙げており，著者たちの仲間でも，かねてから注目している人物である. この人の書いたものなら，われわれでも理解できないことはないだろう. これが輪講をはじめるに当っての著者たちの期待であった. そして，この期待は裏切られなかった. 数学については古い教育しか受けていない著者にもまことによくわかるのである. その後，物理学科の4年生の演習（数人単位の）にこの Lighthill の本を教材として輪講を2, 3回したが，学生にも理解しやすいようである. さいわい，仲間の1人，高見穎郎氏によって翻訳され，「フーリエ解析と超関数」（ダイヤモンド社，1975年）として出版されている. 最小限の数学的な予備知識で超関数が勉強できるという点で，読者諸氏におすすめしたい書物である.

さて，超関数は関数概念の拡張であるが，Schwartz の超関数 (distribution) が唯一のものではない. 上記の Lighthill は**一般関数** (generalized function) という名のもとに，Schwartz の流儀で，しかし簡単化した形で，関数概念の拡張を行なうのである. わが国でも佐藤幹夫教授による超関数 (hyperfunction) の理論がある. **佐藤の超関数**は解析関数の境界値の概念を一般化したもので，Schwartz の超関数の拡張になっているということである. 残念ながら，著者にはその間の事情はよくわからない. しかし，‘解析関数の境界値’というのが甚だ魅力的である. これなら，関数論の知識があれば理解できるのではないかという希望がわいてくる.

そこで，佐藤教授の論説：“超函数の理論について”，数学，10巻1号（1958年10月)，1–27，を勉強する気になった. このわずか27ページに盛られている内容は驚嘆すべきものである. その深さと豊かさは正に佐藤教授ならではの感じがする. といっても，実は著者にはその何分の一，あるいは何十分の一しか理解できないと白状せざるを得ない. 局所性，fibre 空間，解析的層，cohomology,……などの術語に遭遇すると，理解の糸は途切れてしまう. しかし，とにかく，佐藤の超関数についておぼろげながらイメージがつかめたような気がした. それは，佐藤の超関数とはつまり**渦層**のことではないか，ということである.

§2. 佐藤の超関数

いま，複素 z 平面 ($z=x+iy$) を考える．さらに，2つの解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ を考える．ただし，$F_+(z)$ は上半平面 ($y>0$) で正則，$F_-(z)$ は下半平面 ($y<0$) で正則とする．さて，$\varepsilon>0$ として

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{2.1}$$

によって定義される $f(x)$ を考えてみよう．もしも右辺の極限値が存在するならば，$f(x)$ は**ふつうの関数**である．たとえば，$F_+(z), F_-(z)$ が実数軸 ($y=0$) の上でも正則であるとすると，確かに上式の右辺の極限値が存在して

$$f(x)=F_+(x)-F_-(x) \tag{2.2}$$

となる．ところが，もしも極限値が存在しないとすると，(2.1) の等式自身が成り立たず，$f(x)$ の意味がなくなってしまう．しかし，そのばあいにも (2.1) の右辺に意味をもたせて，それを**超関数**とよび，$f(x)$ と書く，というのが佐藤の考え方である(と思う)．

極限値が存在しないのに (2.1) の右辺をあいまいさなく意味づけることは，はたして可能なのか？ 恐らく読者諸氏はまずこのような疑問を抱かれるであろう．ところが，流体力学的に考えると，(2.1) の右辺の意味はきわめて明瞭なのである．解析関数が縮まない流体の渦無しの流れを表わすことをまず思い出していただきたい．つまり，一般に解析関数 $w=F(z)$ は**複素速度** $w=u-iv$ を表わすのである．ここで $\boldsymbol{v}(u,v)$ は流速ベクトルである．さて，2つの解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ を考えるということは，流体力学的にいえば，上半平面と下半平面にそれぞれ別々の渦無しの流れがあるということである．したがって，上下両半平面の境いになっている実数軸上には，一般に**渦**と**わき出し**の分布があるだろう．つまり，**渦層**と**わき出し層**が存在する．(2.1) の右辺は正にこの渦層とわき出し層を表わしているのである．(今後，渦層とわき出し層を一括して渦層とよぶことにする．) 極限値が存在するばあいには，渦層に沿っての渦の分布はふつうの関数 $f(x)$ で表わされる．極限値が存在しないばあいでも，$F_+(z), F_-(z)$ によってきまる明確な渦の分布があることには変りはない．

たとえば，原点 $z=0$ に強さ1の時計方向の渦糸があるばあいを考えよう．このばあい，複素速度は上下両半平面で同一の解析関数で与えられ

$$F_+(z)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z},\quad F_-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z} \tag{2.3}$$

である．これを(2.1)の右辺に代入すると，$x \neq 0$ では極限値が存在して，$f(x)=0$ となる．しかし，$x=0$ では極限値は存在せず，したがって $f(0)$ は定義されない．すなわち，$x=0$ を含む領域では，(2.1)によって定義されるような‘ふつうの関数’は存在しない．しかし，原点に強さ1の渦糸が存在することは厳然たる事実である！(2.1)の右辺はこの事実を表わすものと解釈すれば，それによって定義される $f(x)$ なるものは明確な意味をもつことになる．これがつまり，‘超関数’である．実は，この超関数こそDiracの δ 関数である．

以上を要約すると，“実数軸上の渦の分布を表わすものが超関数である”ということになる．(Schwartzの超関数の原語が分布 (distribution) であることと本質的に関連する．) そして，渦の分布を指定するためには，上下両半平面での渦無しの流れの場，したがって2つの解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ の1組を与えればよく，その事情を示すのが(2.1)の定義式である，というわけである．それゆえ，(2.1)の右辺の極限値の存在に拘泥することなく，単に

$$[F_+(z), F_-(z)] \to f(x) \tag{2.4}$$

と書いて，超関数 $f(x)$ が1対の解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ によって定義されることを表わしてもよい．

§3. 目　　標

さて，本論に入る前に，本書の目標を述べておこう．いうまでもないが，超関数論を厳密に展開しようというのではない．超関数が雲の上の存在ではなく，ふつうの関数と同じように使いこなせるようにしたい．それも，数学の専門的な素養がなくても，つまり大学の数学科の講義を聴いていなくても理解できるようなやり方で進みたい．予備知識としては，複素関数論の基礎的な部分で，理工系の学生諸君ならたいていご存じのところだけを期待する．いいかえると，複素関数論の自然の延長として超関数論を学ぼうというのである．

超関数論を学べば，以下に述べるような便利な点がある．まず，超関数は何回でも微分可能である．たとえば $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ……等が疑義なく定義できる．$\varphi(x)$ が解析関数のばあい，定積分：

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.1}$$

は，$\varphi(0) \neq 0$, $a<0<b$ ならば存在しないが，$\varphi(x)/x$ を超関数と解釈すれば(3.1)は存在する．しかもその値はいわゆる **Cauchy の主値**

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{-\varepsilon}+\int_\varepsilon^b\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{3.2}$$

と一致する．また，定積分：

$$\int_0^a x^\alpha\varphi(x)dx \tag{3.3}$$

は，$\alpha<-1$ のばあいは存在しないが，$x^\alpha\varphi(x)$ を超関数と解釈すると積分値が存在する．しかもその値は，**Hadamard** が**発散積分の有限部分**と称したものに一致する．

理工学の問題を解くのに Fourier 変換がよく使われる．関数 $f(x)$, $g(\xi)$ のあいだに

$$g(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \tag{3.4}$$

の関係があるとき，$g(\xi)$ は $f(x)$ の **Fourier 変換**であるという．このばあい，$f(x)$ は $g(\xi)$ を使って

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi \tag{3.5}$$

のように表わすことができる．そして $f(x)$ を $g(\xi)$ の **Fourier 逆変換**という．

さて，(3.4), (3.5) が成立するためには，まず前提条件として右辺の定積分が存在しなければならない．そのためには，$x\to\pm\infty$ で $f(x)$, $g(x)$ になんらかの条件が必要である．たとえば，$f(x)=1$ のような簡単な関数に対しても，その Fourier 変換は存在しないのである．'ふつうの関数' では，Fourier 変換に際してこのような制限がつくけれども，$f(x)$ を超関数とすれば，その Fourier 変換として超関数 $g(\xi)$ がはるかに緩い条件のもとに定義されることになり，(3.5) の逆変換も成り立つのである．たとえば，$f(x)=1$ の Fourier 変換は $g(\xi)=\delta(\xi)$，つまり Dirac の δ 関数である．逆に δ 関数の Fourier 変換は 1 である．なお，$f(x)=x^n$ の Fourier 変換が $g(\xi)=(-2\pi i)^{-n}\delta^{(n)}(\xi)$ であることなども導かれる．

これらの事柄を，"超関数は渦の分布である" という立場で，順次導いていくというのが本書の方針である．前記の Lighthill の本の内容はすべてカバーされ，さらに立ち入った議論も可能となるだろう．

§4.　複素速度と解析関数

2 次元の流れの場を考える．3 次元空間での**速度ベクトル**を $\boldsymbol{v}(u,v,0)$ とすると，**渦度ベクトル** $\boldsymbol{\omega}$，**わき出し** Θ はそれぞれ

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = (0,0,\omega), \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4.1}$$

$$\Theta = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.2}$$

のように与えられる．いま，**渦度** ω と**わき出し** Θ を複素数的に組み合わせると

$$\omega + i\Theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u - iv)$$

となるから，

$$w = u - iv, \tag{4.3}$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \tag{4.4}$$

とおけば

$$\omega + i\Theta = 2i\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \tag{4.5}$$

が得られる．ここで

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4.6}$$

の関係が使ってある．w は**複素速度**である．

いま，任意の閉曲線Cをとり，それの囲む領域Sについて (4.5) の面積積分を考えると，

$$\iint_S (\omega + i\Theta)\,dS = 2i\iint_S \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,dS = \int_C w\,dz \tag{4.7}$$

が成り立つ(図1)．ただし，最右辺を出す際には2次元の **Green の公式**を使えばよい．さて，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさを q，x 軸に対する傾きを θ とし，またCの線要素 ds の x 軸に対する傾きを φ とすれば

$$w = qe^{-i\theta}, \quad dz = ds\,e^{i\varphi} \tag{4.8}$$

であるから，

$$\begin{aligned} w\,dz &= qe^{i(\varphi-\theta)}ds \\ &= q\{\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)\}ds \\ &= (v_s + iv_n)ds \end{aligned}$$

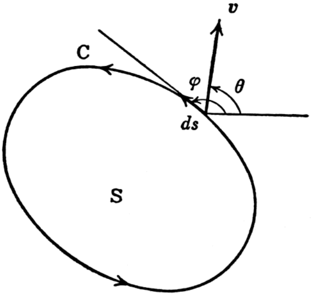


図 1

となる．ただし，v_s, v_n はそれぞれ速度の接線成分および法線成分である．したがって

$$\int_C w\,dz = \Gamma(\mathrm{C}) + iQ(\mathrm{C}), \tag{4.9}$$

$$\Gamma(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{C}} v_s ds, \quad Q(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{C}} v_n ds \tag{4.10}$$

の関係がある．$\Gamma(\mathrm{C})$ はCに沿う**循環**，$Q(\mathrm{C})$ はCを通って流出する**流量**である．けっきょく

$$\iint_{\mathrm{S}} (\omega + i\Theta) dS = \int_{\mathrm{C}} w dz = \Gamma(\mathrm{C}) + iQ(\mathrm{C}) \tag{4.11}$$

の関係が成り立つ．この等式から，循環 $\Gamma(\mathrm{C})$ が閉曲線Cの内部の渦の総量を表わし，流出量 $Q(\mathrm{C})$ がわき出しの総量を表わすことがわかる．ただ，注意しなければならないのは，(4.11) の左辺が意味をもつのは ω, Θ が有限の値をもつばあい，すなわち速度 $\boldsymbol{v}(u, v)$ が領域Sで微分可能のばあいに限ることである．u, v (したがって複素速度 w) がCの内部に特異点をもつようなばあいには，(4.11) の等式は意味を失う．しかし，そのばあいでも，(4.11) の右辺は (Cに沿っての w の線積分が存在する限り) 明確な意味をもつものである．

例 1　渦糸

$$w = ik\frac{1}{z}, \quad k = \text{実数} \tag{4.12}$$

で与えられる流れの場を考える．(4.5) により

$$\omega + i\Theta = 2i\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0.$$

$$\therefore \quad \omega = 0, \quad \Theta = 0.$$

すなわち，流れは渦無しで，わき出し無しである．こう決めつけることのできるのは，$z \neq 0$ での話である．$z=0$ は w の特異点であって，そこでは微分は存在しない．渦度 ω がどうなるかについては何ともいえないのである．しかし，原点をとり囲む任意の閉曲線Cについて

$$\int_{\mathrm{C}} w dz = ik\int_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z} = -2\pi k$$

であるから，循環は $\Gamma(\mathrm{C}) = -2\pi k$ となる．循環が渦の総量を表わすという立場に立てば，Cの内部のどこかに $-2\pi k$ の強さの渦がなければならない．その場所としては w の特異点である原点 $z=0$ しか考えられない．つまり，原点には強さ $-2\pi k$ の渦が集中していると考える．これが渦糸の概念である．

渦無しでわき出し無しの流れでは $\omega=0, \Theta=0$ である．したがって，(4.5) から $\partial w/\partial \bar{z}=0$．これから，$w$ が z だけの関数，すなわち z の**解析関数**であることがわかる．$w=F(z)$ とすると，$F(z)$ の特異点には，上の渦糸の例から想像されるように，一般に渦やわき出しが極めて複雑な形で集中している．たとえば**2重わき出し**，**4重わき出し**，……などである．

§5. 渦の分布と超関数

図2のような，x軸の一部を内部に含む領域Dを考える．(Dは全平面でもよい.) Dのうちx軸の上側にある部分をD_+，下側にある部分をD_-とする．D_+，D_-にはそれぞれ渦無しでわき出し無しの流れがあるものとする．これらの流れは，それぞれ解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ で表わされる．いま，両方の流れを一括して

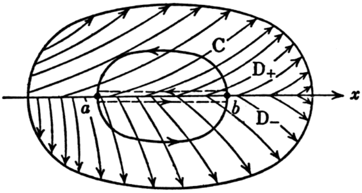


図 2

$$w=F(z)=\begin{bmatrix}F_+(z)\\F_-(z)\end{bmatrix} \tag{5.1}$$

のように表わすことにしよう．さてx軸上の2点$z=a$, $z=b$を通る閉曲線Cについてwの線積分を考えると，

$$\begin{aligned}\int_C w\,dz&=\int_a^b F_-(z)dz+\int_b^a F_+(z)dz\\&=\int_a^b F_-(x-i\varepsilon)dx+\int_b^a F_+(x+i\varepsilon)dx\\&=-\int_a^b\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}dx\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる．ただし，上式の第2行は，積分路Cを変形してx軸を挟む幅2εの平行線にしたものである．$F_+(z)$, $F_-(z)$がそれぞれD_+, D_-で正則であることから，このような積分路の変形が許されるのである．

$\varepsilon\to 0$とするとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}=f(x) \tag{5.3}$$

のような極限値が存在するばあいには，(5.2)は

$$\int_C w\,dz=-\int_a^b f(x)dx \tag{5.4}$$

となる．(4.11)式によれば，上式の左辺はx軸上に渦とわき出しの分布があることを意味し，したがって

$$-f(x)=\gamma(x)+iq(x)$$

と書けば，$\gamma(x)$, $q(x)$はそれぞれ**渦層**および**わき出し層**の**線密度**を表わす．

(5.3)の極限値が存在しないばあいでも，$F_+(z)$, $F_-(z)$を与えればx軸上の渦とわき出しの分布がきまる．この意味で

$$\begin{bmatrix} F_+(z) \\ F_-(z) \end{bmatrix} \to f(x), \quad [F_+(z), F_-(z)] \to f(x),$$

あるいは，簡単に

$$F(z) \to f(x) \tag{5.5}$$

と書き，解析関数の組 $F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$ によって**超関数** $f(x)$ が定義されるという．また，$F(z)$ を超関数 $f(x)$ の**母関数**とよぶことにする．$F(z)$ を1つの関数と考えると，それは x 軸上に特異性をもつことになる．$F_+(z)$, $F_-(z)$ をそれぞれ $F(z)$ の**上成分**，**下成分**とよぶことにしよう．

任意に解析関数(の1組) $F(z)$ を考えると，それを母関数とする超関数 $f(x)$ が確定する．今後，超関数の和，差，微分，積分などの演算は母関数を介して定義される．後でわかるように，ふつうの関数は超関数の1種であるとみなすことができる．また，ふつうの関数についての和，差，微分，積分などの演算が，上述の超関数について定義された演算と矛盾しないことが示される．したがって，超関数 $f(x)$ についてなされる種々の計算の結果は，$f(x)$ がふつうの関数のばあいにも成り立つのである．この意味で，超関数はふつうの関数の自然な拡張であるといえる．

§6. ふつうの関数と超関数

ふつうの関数と同じように超関数を使いこなすようにするのが本書の目標であると上に述べた．さて，“ふつうの関数のことをよく知っている”というのはどういうことか？ それは，ふつうの関数には x, $\sin x$, e^x, … などのようなものがあるということを知っているだけではなく，それらの関数について四則演算や微分・積分などの演算ができるということである．つまり，関数 $f(x)$ と，それについての演算とをひっくるめて知っているということである．いわば，われわれはすでに **O. F. の世界**にいる．(O.F. は**ふつうの関数** (ordinary function) を意味する．) 図3の O.F. の世界の内容の関数 $f(x)$ としては，上述の x, $\sin x$, … のような初等関数や，Bessel 関数，球関数，楕円関数など，いろいろなものがある．また，演算 $\mathcal{O}$ としては，和・差・積・商をつくる四則演算，

O.F. の世界

関　数	$f(x)_{\mathrm{O.F.}}$
演　算	$\mathcal{O}_{\mathrm{O.F.}}$

H.F. の世界

超関数	$f(x)_{\mathrm{H.F.}}$
演　算	$\mathcal{O}_{\mathrm{H.F.}}$

図 3

微分・積分，たたみこみ，Fourier 変換，Laplace 変換，…など，これまたいろいろある．

超関数 (hyperfunction) についても，**H.F. の世界**ともいうべきものが考えられるだろう．そこには超関数なるものがあり，四則演算や微分・積分などの演算ができ，…といったものである．そして，それらの演算はもちろん矛盾なく遂行できるようになっている．このH.F. の世界にわれわれは入ろうとするのである．

しかし，ここで考えなければならないのは，O.F. の世界がわれわれの住む世界として現実のものであるのに対して，H.F. の世界がいわば架空のものであることである．"H.F. の世界に入る" といっても，まずその世界を現実のものにしておかなければならない．それには，われわれ自身でその世界をつくり上げておくのが最も便利である．すなわち，超関数とその演算の規則とをわれわれ自身で定義しておくのである．新しくつくる以上，その世界での演算の規則はどのようにきめてもよいはずであるが，有効性を考えると，つぎの条件が要請されるだろう．

（i） 演算規則どうしに矛盾がないこと．

（ii） ふつうの関数の演算規則に類似していること．

（iii） O.F. の世界とH.F. の世界に緊密な対応関係が成り立つこと．

（i）の条件はもちろん必要である．これに反して（ii）と（iii）の条件は必ずしも必要ではない．内部矛盾のないH.F. の世界がO.F. の世界とは独立に存在しても，数学的にはなんらさしつかえがないからである．しかし，（ii）の条件が満たされておれば，O.F. の世界の既存の知識を十分に活用することができるだろう．また，（iii）の条件が満たされておれば，H.F. の世界で得られた知識を現実のO.F. の世界にひきもどして利用することができる．

たとえば，ある関数 $f(x)$ に，ある演算 $\mathcal{O}$ を行なった結果を $\mathcal{O}f(x)$ で表わそう．これを求めるにはつぎのようにすればよい．（iii）の条件が満たされておれば，$f(x)_{\mathrm{O.F.}}$，$\mathcal{O}_{\mathrm{O.F.}}$ に対応する $f(x)_{\mathrm{H.F.}}$，$\mathcal{O}_{\mathrm{H.F.}}$ が存在する．(添字 O.F.，H.F. はそれぞれの世界での関数(超関数) $f(x)$，演算 $\mathcal{O}$ であることを示す.) H.F. の世界で $\mathcal{O}_{\mathrm{H.F.}}f(x)_{\mathrm{H.F.}}$ を計算する．この結果を O.F. の世界にひきもどせば $\mathcal{O}f(x)$ が得られるのである．

$f(x)_{\mathrm{O.F.}}$ に対応する $f(x)_{\mathrm{H.F.}}$ を見出すことを，"ふつうの関数 $f(x)$ を超関数に**見直す**" ということにしよう．**見直し**の操作によって，O.F. の世界は H.F.

の世界に組み込まれる．すなわち，O.F. と H.F. の２つの世界を別々に考えるのではなく，前者を後者の一部と考えるのである．たとえば，日本を世界連邦の一員と考えるのに対比されるだろう．その際，各個の日本人(ふつうの関数)は地球人(超関数)とみなされるのである．

見直しの操作とならんで重要なのは**ひきもどし**の操作である．つまり，超関数 $f(x)$ が与えられたとき，それに対応するふつうの関数 $f(x)_{\text{O.F.}}$ を見出す操作である．この操作を記号的に

$$\text{O.F.}f(x) = f(x)_{\text{O.F.}} \tag{6.1}$$

で表わそう．(このばあい左辺の $f(x)$ は明らかに超関数であるから，添字 H.F. をつける必要はないだろう．) ふつうの関数 $f(x)_{\text{O.F.}}$ から出発して

見直し:　　$f(x)_{\text{O.F.}} \to f(x)$
ひきもどし:　　$f(x) \to f(x)_{\text{O.F.}} = \text{O.F.}\,f(x)$

の操作をひき続いて行なったとき，もとの $f(x)_{\text{O.F.}}$ にもどるべきことはいうまでもない．

上述の (iii) の条件が満足されるためには，O.F. の世界での演算 $\mathcal{O}_{\text{O.F.}}$ に対応する H.F. の世界での演算 $\mathcal{O}_{\text{H.F.}}$ を

$$\text{O.F.}\{\mathcal{O}_{\text{H.F.}}f(x)\} = \mathcal{O}_{\text{O.F.}}\{\text{O.F.}f(x)\} \tag{6.2}$$

が成り立つように定義しておけばよい．これによって，O.F. の世界での計算をすべて H.F. の世界で行なうことができるのである．(6.2) の関係が成り立つとき，演算 $\mathcal{O}_{\text{H.F.}}$ は**合理的に定義されている**という．本書では，新しく演算 $\mathcal{O}_{\text{H.F}}$ を導入する際に，**定義の合理性**にはとくに注意を払う．

注意　上では，‘見直し’ と ‘ひきもどし’ の操作の概念を述べただけで，具体的にどうするかという手続きについては説明していない．‘ひきもどし’ については次章のはじめに一般的に定義するが，‘見直し’ については，個々の関数 $f(x)_{\text{O.F.}}$ の性質に応じて $f(x)_{\text{H.F.}}$ を定義するという方法をとる．

関数概念の拡張という意味で，ふつうの関数と超関数の関係を実数と複素数の関係に対比して考えてみよう．

２つの実数 x, y の１組 (x, y) を１つの数 $z \equiv (x, y)$ と考え，これを複素数という．z の四則演算はつぎのように定義される．$z = x + iy$ とおいて，実数についての四則演算とまったく同様に行ない，ただ $i^2 = -1$ とおく．これによって，複素数の四則演算は矛盾なく実行できる．しかも，複素数 $(x, 0)$ の計算は実数 x の計算とまったく同じである．したがって，実数 x を複素数 $(x, 0)$ と ‘合理的’ に ‘見直す’ ことができるのである．実数関数の定積分を求めるのに，複素平面での積分が威力を発揮することは周知のとおりである．こ

れは複素積分という演算が合理的に定義されているからである.

以下で見るように，任意の超関数は何回でも微分可能で，また任意の有限区間で定積分が可能である．これは，H.F. の世界で計算を行なう利点の1例といえる.

しかし，あらかじめ注意しておかなければならないのは，O.F. の世界で慣用の演算が必ずしも，つねに，合理的に，H.F. の世界で定義できるとはかぎらないことである．たとえば，2つの超関数の積や，超関数の関数などは，ある条件を満たす超関数について定義されるだけである.

2 超関数の演算

§1. 超関数の定義

x 軸の一部または全部を含む領域をDとし，Dのうち x 軸の上側にある部分をD$_+$，下側にある部分をD$_-$ とする．D$_+$ で正則な解析関数を $F_+(z)$，D$_-$ で正則な解析関数を $F_-(z)$ とする．

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{1.1}$$

という極限値 $f(x)$ が存在するばあいには，$f(x)$ はふつうの関数である(たとえば $F_+(z)=z$, $F_-(z)=0$ ならば $f(x)=x$ である)．右辺の極限値が存在しないばあいでも，右辺は $F_+(z)$, $F_-(z)$ という1組の解析関数によってきまる‘ある種のもの’を表わすと考え，

$$\begin{bmatrix}F_+(z)\\F_-(z)\end{bmatrix}\to f(x) \tag{1.2}$$

と書いて，その‘ある種のもの’を**超関数** $f(x)$ とよぶことにする．スペースを節約するために，(1.2) の左辺を $[F_+(z),\ F_-(z)]$ のように横長に書き表わしてもよい．あるいは簡単に $F_+(z)$, $F_-(z)$ の1組を一括して $F(z)$ で表わし，(1.2) を

$$F(z)\to f(x) \tag{1.3}$$

と書く．$F(z)$ は2個の解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ の1組と考えてもよいし，x 軸上に特異性をもつ1個の解析関数と考えてもよい．さて，(1.3) は，“解析関数 $F(z)$ によって超関数 $f(x)$ が定義される”ことを表わしている．この意味で，(1.3) のかわりに，今後

$$f(x)=\text{H.F.}\ F(z),\quad F(z)=\text{G.F.}\ f(x) \tag{1.4}$$

のような記号を用いることにする．H.F. は**超関数** (hyperfunction)，G.F. は**母関数** (generating function) の意味である．すなわち，(1.4) は，“$f(x)$ は $F(z)$ のつくる超関数”，“$F(z)$ は $f(x)$ の母関数”を表わすのである．

以上を定義としてまとめておこう．

〔**定義 1**〕 x 軸上の区間 (a,b) を内部に含む領域をDとし，Dのうち x 軸の上側にある部分を D_+，下側にある部分を D_- とする．$F_+(z)$，$F_-(z)$ はそれぞれ D_+，D_- で正則な解析関数とする．このとき，解析関数の組 $F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$ は区間 (a,b) で超関数 $f(x)$ を定義するといい，記号的に

$$f(x) = \text{H.F.}\, F(z), \quad F(z) = \text{G.F.}\, f(x)$$

のように表わす．また，$F(z)$ を $f(x)$ の母関数とよび，$F_+(z)$，$F_-(z)$ をそれぞれ母関数の**上成分**，**下成分**という．a, b は $a=-\infty$，$b=\infty$ であってもよい．

さて，1組の解析関数 $F(z)$ によって超関数 $f(x)$ がきまるといっただけでは，その具体的内容ははっきりしない．(1.1) のような極限値が存在するばあいには，**極限操作**という具体的な演算によって $F(z)$ から $f(x)$ を導くことができる．ところが，いまのばあい，極限操作が実行できないようなばあいまで包括するような対応づけがほしいのである．これはなかなかむずかしい問題である．そこで，われわれはつぎのような方針をとることにする．

とにかく，$F(z)$ から導かれる超関数 $f(x)$ なるものがあって，$f(x)$ はふつうの関数と同じように四則演算や，微分や積分の演算ができ，しかもふつうの関数は超関数の特別なばあいとして含まれるようなものであってほしい．もし，そのような性質をもつ超関数が構成できるならば，ふつうの関数についてわれわれのもっている知識をさらに広い超関数の領域まで活用することができるだろう．たとえば，数の概念を実数から複素数まで広げることによって種々の計算がどんなに便利に行なえるようになったかを思い出して頂きたい．また，複素関数の導入によって三角関数が指数関数に統合されたり $(e^{ix}=\cos x+i\sin x)$，定積分の計算が容易になったりしたことも思い出されるであろう．

実数から複素数へ，また実関数から複素関数への拡張に当って特徴的なことは，**演算の規則**がそのまま成り立つような形で拡張が行なわれていることである．そこで，われわれの方針としては，極限操作 (1.1) のような $F(z)$ と $f(x)$ の**直接的な**対応づけではなくて，$f(x)$ に関する種々の演算を $F(z)$ の演算に対応づけることによって**間接的に** $F(z)$ と $f(x)$ とを対応づけるという方法をとることにする．その際，もちろん，極限操作が実行可能なばあいには上述の演算どうしの対応づけが当然成り立つように配慮するのである．

超関数をふつうの関数に対応づけるための出発点として，まず**超関数の値**を定義する．

〔**定義 2**〕 超関数 $f(x)=\text{H.F.}\ F(z)$ の1点 $x=a$ での値を

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(a+i\varepsilon)-F_-(a-i\varepsilon)\} \tag{1.5}$$

で定義する．ただし，右辺の極限値が存在するものとする．

母関数の上成分 $F_+(z)$，下成分 $F_-(z)$ はそれぞれ領域 D_+, D_- で正則であるが，x 軸上に特異点をもつかも知れない．もしも $z=a$ が特異点であれば，(1.5) の右辺は極限値をもたないこともあり得る．そのばあい，定義によれば，超関数は $x=a$ で値をもたないのである．

a を動かすと，(1.5) の $f(a)$ は実変数 a のふつうの関数となる．a の代りに改めて x と書くと，このふつうの関数は超関数 $f(x)$ に対応するものと考えられる．そこで，つぎのように定義する．

〔**定義 3**〕 超関数 $f(x)=\text{H.F.}\ F(z)$ に対応するふつうの関数を

$$\text{O.F.}\,f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{1.6}$$

で定義する．

簡単のために，$\text{O.F.}\,f(x)$ を $f(x)_{\text{O.F.}}$ あるいは $f_{\text{O.F.}}(x)$ のように書くことがある．(1.5) と (1.6) とを合わせ考えると，

$$f(a) = \{\text{O.F.}\,f(x)\}_{x=a} = f(a)_{\text{O.F.}} = f_{\text{O.F.}}(a) \tag{1.7}$$

の関係が成り立つ．

$f(x)$ から $\text{O.F.}\,f(x)$ を求める操作がすなわち §1.6 で述べた‘ひきもどし’の操作にほかならない．

§2. 線　形　結　合

超関数の線形結合はつぎのように定義される．

〔**定義 4**〕（**線形結合**） $f_1(x)=\text{H.F.}\,F_1(z)$，$f_2(x)=\text{H.F.}\,F_2(z)$ を任意の超関数，c_1, c_2 を任意の複素定数とする．このとき

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{c_1F_1(z)+c_2F_2(z)\} \tag{2.1}$$

によって線形結合を定義する．

（**合理性**） $F_1(z)$，$F_2(z)$ は母関数であるから，領域 $D_\pm$ で正則である．したがって，その線形結合も $D_\pm$ で正則で，母関数の資格をそなえている．したがって，(2.1) の右辺はたしかに超関数を表わす．そこで，その超関数に対応するふつ

うの関数を考えると，定義3により

$$\text{O.F.}\{c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\} = c_1\{\text{O.F.} f_1(x)\}+c_2\{\text{O.F.} f_2(x)\}$$

である．右辺は‘もとの超関数に対応するふつうの関数’の線形結合であるから，(2.1) の左辺はたしかに超関数の線形結合としてふさわしい．▮

(2.1) は

$$c_1\,\text{H.F.}\,F_1(z)+c_2\,\text{H.F.}\,F_2(z) = \text{H.F.}\{c_1F_1(z)+c_2F_2(z)\}$$

のように書き表わすことができる．これは H.F. という演算子が線形演算子であることを示すものである．

〔**定義 5**〕（**超関数 0**） 領域Dのいたるところで正則な解析関数 $\varphi(z)$ を母関数とする超関数を超関数0という．すなわち

$$0 \overset{\text{def}}{=} \text{H.F}\,\varphi(z) \tag{2.2}$$

である．

（**合理性**） $\varphi(z)$ は領域Dで正則であるから，そこで渦無しの流れを表わす．したがって x 軸上の渦分布は0であるから，超関数0とよぶのにふさわしい．実際，

$$\text{O.F.}\,0 = 0 \tag{2.3}$$

であることは，定義3を使えば容易に確かめられる．▮

ここで注意すべきは，$\text{O.F.}\,f(x)=0$ であるからといって，$f(x)$ は必ずしも0ではないことである．たとえば $f(x)=\text{H.F.}\,[1/z^2, 1/z^2]$ を考えると，これは $\text{O.F.}\,f(x)=0$ を与える．実は，後でわかるように，これは $f(x)=2\pi i\delta'(x)$ という超関数である．ただし，$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である．

〔**定義 6**〕（**相等性，同等性**） 2つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ が**等しい**というのは $f_1(x)-f_2(x)=0$ のことである．このとき $f_1(x)=f_2(x)$ と書く．また，このとき，これらの母関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ は**同等である**といい，$F_1(z)\cong F_2(z)$ のように表わす．

[**定理 1**] 領域Dで正則な任意の解析関数を $\varphi(z)$ とすれば

$$F(z)+\varphi(z) \cong F(z) \tag{2.4}$$

である．

（証明） $\text{H.F.}\{F(z)+\varphi(z)\}$

$$= \text{H.F.}\,F(z)+\text{H.F.}\,\varphi(z) \qquad \because\ (2.1)$$

$$= \text{H.F.}\, F(z). \qquad \because \ (2.2)$$

したがって，同等性の定義によって(2.4)が成り立つ. ∎

§3. 超関数と解析関数の積

超関数は線形結合を許すだけではなく，任意の解析関数との積も合理的に定義できる.

〔**定義 7**〕 $f(x)=\text{H.F.}\, F(z)$ は任意の超関数，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な任意の解析関数とする．このとき，$f(x)$ と $\varphi(x)$ の積を

$$\varphi(x)\cdot f(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\varphi(z)F(z)\} \tag{3.1}$$

で定義する．積の記号(・)は省略してもよい.

(合理性) 右辺の $\varphi(z)F(z)$ を上成分と下成分に分けて具体的に書くと

$$\varphi(z)F(z) = [\varphi(z)F_+(z),\ \varphi(z)F_-(z)]$$

である．$\varphi(z)F_+(z)$, $\varphi(z)F_-(z)$ はそれぞれ領域 D_+, D_- で正則であるから，母関数の資格をそなえている．したがって，(3.1) の右辺はたしかに1つの超関数を表わす．それに対応するふつうの関数は，定義3により

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to+0}\{\varphi(x+i\varepsilon)F_+(x+i\varepsilon)-\varphi(x-i\varepsilon)F_-(x-i\varepsilon)\}\\
&\quad= \varphi(x)\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}\\
&\quad= \varphi(x)\cdot\{\text{O.F.}\, f(x)\}
\end{aligned}$$

である．したがって

$$\text{O.F.}\{\varphi(x)\cdot f(x)\} = \varphi(x)\cdot\{\text{O.F.}\, f(x)\} \tag{3.2}$$

が成り立つ．すなわち (1.6.2) の条件が満たされている. ∎

〔**定義 8**〕 **(超関数 1)**

$$\mathbf{1}(z) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_+(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_-(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

は母関数として同等である．これらに対応する超関数を超関数1と定義する．すなわち

$$1 \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\,\mathbf{1}(z) = \text{H.F.}\,\mathbf{1}_\pm(z) \tag{3.4}$$

である.

(合理性) まず，明らかに

$$\mathbf{1}_\pm(z) = \mathbf{1}(z) \pm \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

である．$\pm 1/2$ は定数で，もちろん解析関数の1つであるから，$\mathbf{1}_{\pm}(z) \cong \mathbf{1}(z)$ が成り立つ．(3.4) で定義される超関数の O.F. をとると

$$\begin{aligned} \text{O.F.}\,1 &= \lim_{\varepsilon\to+0}\{\mathbf{1}(x+i\varepsilon)-\mathbf{1}(x-i\varepsilon)\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

したがって，たしかにこの超関数は1とよぶのにふさわしい．∎

ここで導入した超関数1を定義7の $f(x)$ として使うと，x 軸上で正則な解析関数を見直した超関数が得られる．

〔定義 9〕　x 軸上で正則な解析関数 $\varphi(z)$ を見直した超関数を

$$\varphi(x)_{\mathrm{H.F.}} \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(x)\cdot 1_{\mathrm{H.F.}} = \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}(z)\} \tag{3.7}$$

で定義する．ただし，添字 H.F. は超関数であることを強調するためにつけたもので，ふつうはこれを省略してもよい．

（合理性）　定義7により，$\varphi(x)_{\mathrm{H.F.}}$ が超関数であることは明らかである．(3.7) の両辺の O.F. をとると

$$\begin{aligned} \text{O.F.}\,\varphi(x)_{\mathrm{H.F.}} &= \text{O.F.}\{\varphi(x)\cdot 1_{\mathrm{H.F.}}\} \\ &= \varphi(x)\cdot\{\text{O.F.}\,1_{\mathrm{H.F.}}\} \qquad \because\ (3.2) \\ &= \varphi(x). \qquad \because\ (3.6) \end{aligned}$$

したがって，この定義は合理的である．∎

これによって，$x^n (n=0,1,2,\cdots)$，e^{ax}，$\sin nx, \cdots$ などわれわれになじみの関数は超関数と見直されるのである．

§4.　ふつうの関数を超関数と見直すこと

x 軸上で正則な解析関数 $\varphi(x)$ は，何回でも微分可能というような非常に良い性質をもつ関数である．$f(x)=x^n$, e^{ax}, $\sin nx, \cdots$ などがその例である．ところが，ふつうの関数としてわれわれの扱うものには $f(x)=|x|$, $\log|x|$, $H(x)$ (Heaviside の関数)，… などのように解析的でないものがある(これらは $x=0$ に特異性をもつ)．これらの関数を超関数と見直すにはどうすればよいか？　これをつぎに考えよう．

超関数 $f(x)$ を与えるには，それを生み出す母関数 $F(z)$ を与えればよい．流体力学的にいえば，渦の分布 $f(x)$ に対応するような流れの場，つまり**複素速度** $F(z)$ を与えればよい．それにはつぎの定理を使う．

[定理 2] $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能，すなわち $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ が収束するならば，

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt \tag{4.1}$$

が存在して，$F(z)$ は上半平面 ($\mathrm{Im}\,z>0$) および下半平面 ($\mathrm{Im}\,z<0$) でそれぞれ正則な解析関数 $F_+(z)$, $F_-(z)$ を表わす．しかも

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \tag{4.2}$$

が成り立つ．$f(x)$ が連続関数のばあいには，上式の右辺は単に $f(x)$ となる．

(証明) $|t-z|=|t-(x+iy)|=\{(t-x)^2+y^2\}^{1/2}\geqq|y|$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad |F(z)|&\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|}{|t-z|}dt\\&\leqq\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|y|}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt.\end{aligned}$$

したがって $F(z)$ が存在する．(4.1) の右辺の被積分関数は明らかに z の解析関数であるから，$F(z)$ も解析関数である．これで定理の前半は証明された．

つぎに，

$$\begin{aligned}&F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{t-x-i\varepsilon}-\frac{1}{t-x+i\varepsilon}\right\}f(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\varepsilon f(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2}dt,\quad t=x+\varepsilon s\ \text{とおく}\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+\varepsilon s)}{s^2+1}ds\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)\frac{f(x+\varepsilon s)}{s^2+1}ds.\end{aligned}$$

ここで $\varepsilon\to+0$ とすれば，

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{ds}{s^2+1}=\int_{0}^{\infty}\frac{ds}{s^2+1}=\frac{\pi}{2}$$

を考慮して (4.2) が得られる．▮

この定理によって，$(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能のふつうの関数はすべて超関数として見直すことができることになる．これをはっきり定義の形に述べておこう．

〔定義 10〕 $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で絶対積分可能のふつうの関数とする．これを見直した超関数は，(4.1) で与えられる $F(z)$ を母関数とする超関数 $f(x)=$ H.F. $F(z)$ であると定義する．

（合理性） (4.2) 式は

$$\text{O.F.}\,f(x)_{\text{H.F.}}=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \tag{4.3}$$

の関係を示している．$f(x)$ が連続関数のばあいには，O.F. $f(x)_{\text{H.F.}}$ がちょうどもとの $f(x)$ になっているから，たしかに合理的な見直しである．また，たとえば $x=a$ で $f(x)$ が不連続なばあいには，ふつうの関数としては，

$$f(a+0)\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}f(a+\varepsilon),\quad f(a-0)\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}f(a-\varepsilon)$$

が一致せず，さらに，これらは一般には $f(a)$ とも異なっている．ところが，(4.3) により，$f_{\text{H.F.}}(a)\equiv\{\text{O.F.}\,f(x)_{\text{H.F.}}\}_{x=a}$ は，両側からの極限値の平均，すなわち $\{f(a+0)+f(a-0)\}/2$ を与えるという意味で，きわめて合理的であるといえるだろう．▮

つまり，ふつうの関数から出発して，'見直し' と 'ひきもどし' を続けて行なうと，不連続関数はうまく '修整される' ことになる．

例 1

$$f(x)=H(x;a,b)=\begin{cases}1, & a<x<b\\ 0, & x>a,\quad x<b\end{cases} \tag{4.4}$$

という関数を考える．(4.1) により

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{z-b}{z-a}. \tag{4.5}$$

これは，$z=a$, $z=b$ を結ぶ線分に沿って切目を入れた z 平面で1価正則な関数である(図1)．そして，これは，線分 (a,b) 上に一様な渦分布があるときの複素速度を表わしている．

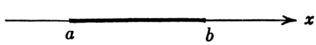


図 1

さて，前にあげた $|x|$, $\log|x|$, $H(x)$, … などの関数は，$(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能という条件を満足しないから，上の定義10では これらを超関数と見直すことはできない．しかし，定義7を応用するとつぎのように定義を拡張することができるので，これらも超関数に仲間入りする．

〔定義 11〕 任意の有限区間で絶対積分可能のふつうの関数 $f(x)$ は，

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z} \tag{4.6}$$

を母関数とする超関数と見直す．ただし，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な**適当な**解析関数である．

（**合理性**）$\varphi(z)$ として，たとえば $e^{az^2}(a>0)$, $(1+z^2)^N$ (N は正の整数), … のような，x 軸上で**零点をもたず**，かつ $x\to\pm\infty$ で急速に ∞ になるような解析関数を選ぶと，$f_1(x)\equiv f(x)/\varphi(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能になる．そこで定義 10 により $f_1(x)=\text{H.F.}\,F_1(z)$ となるような母関数 $F_1(z)$ が得られる．定義 7 により $F(z)\equiv\varphi(z)F_1(z)$ は H.F. $F(z)=\varphi(x)\cdot f_1(x)=f(x)$ を与える．(4.6) 式はこの $F(z)$ を具体的に書き表わしたものである．

つぎに，この母関数 $F(z)$ が**収束因子** $\varphi(z)$ の選び方によらずすべて同等であることを示そう．

異なる解析関数 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ に対応して得られる母関数をそれぞれ $F_1(z)$, $F_2(z)$ とすると

$$F_1(z)-F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1(t)}-\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_2(t)}\right\}\frac{f(t)}{t-z}dt.$$

$\Phi(z)\equiv F_1(z)-F_2(z)$ が x 軸上で正則であることがいえれば，定理 1 によって $F_1(z)$ と $F_2(z)$ の同等性が保証される．さて，上式の右辺の被積分関数は z の関数として x 軸上で正則な解析関数である．($z=t$ では一見特異性をもつようであるが，$\{\cdots\}$ が 0 になるから実は正則である!) したがって t に関して積分して得られる $\Phi(z)$ も x 軸上で正則である．∎

例 2 Heaviside 関数

$$f(x)=H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{4.7}$$

$\varphi(z)=z-c$ を選ぶ．ただし c は任意の複素数 ($\operatorname{Im} c\neq 0$)．

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{z-c}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(t)}{(t-c)(t-z)}dt\\&=\frac{z-c}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{(t-c)(t-z)}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-c}\right)dt \qquad \text{部分分数に分解}\\&=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}\frac{t-z}{t-c}\bigg|_{0}^{\infty}\\&=-\frac{1}{2\pi i}\{\operatorname{Log}(-z)-\operatorname{Log}(-c)\}\\&\cong-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(-z).\end{aligned}$$

ただし，対数関数 $\log z$ を 1 価にするために，x 軸の負の部分に沿って切目をつけて得られ

る z 平面で定義された**主値** $\mathrm{Log}\, z\ (-\pi<\arg z<\pi)$ を使った．したがって，$\mathrm{Log}(-z)$ は x 軸の正の部分に沿って不連続である．けっきょく

$$H(x)=\mathrm{H.F.}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\,(-z)\right\}. \tag{4.8}$$

例1の関数 $H(x;a,b)$ は Heaviside 関数を使って

$$H(x;a,b)=H(x-a)-H(x-b) \tag{4.9}$$

のように表わすことができる．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{G.F.}\,H(x;a,b)&=\mathrm{G.F.}\,H(x-a)-\mathrm{G.F.}\,H(x-b)\\&=-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(a-z)+\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(b-z)\\&=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\frac{z-b}{z-a}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

これは (4.5) の結果と一致する．(一見 Log と log の違いがあるようであるが，実は両者が一致することは容易に確かめられる．)

注意　上の例では $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)/\varphi(t)|dt$ は収束しない．それにもかかわらず (4.6) によって $F(z)$ が計算できたのはなぜだろう？　読者の中には このような疑問を 抱かれた方が多分あるだろうと思う．実は定理2の $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ が存在するという条件は**十分過ぎる**のである．$f(x)$ が有限区間で絶対積分可能で，かつ $|x|\to\infty$ で $|f(x)|=o(|x|^{\alpha})$, $(\alpha<0)$ であれば (4.1) の積分は存在するのである．このように条件をゆるめることをあえてしなかったのは，定義11のように適当な**収束因子** $\varphi(z)$ を考えることによって，そのような小細工はけっきょく不要となるからである．

§5.　超関数の微分

まず，ふつうの関数について成り立つつぎの定理を証明する．

[定理 3]　ふつうの関数 $f(x)$ が微分可能のばあいには，これを定義11によって超関数と見直したとき

$$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z),\quad f'(x)=\mathrm{H.F.}\,F'(z) \tag{5.1}$$

の関係が成り立つ．

(証明)　収束因子 $\varphi(z)$ を使って

$$f_1(x)=f(x)/\varphi(x),\quad F_1(z)=F(z)/\varphi(z) \tag{5.2}$$

と書くと

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(t)}{t-z}dt \tag{5.3}$$

である．両辺を z について微分すると

$$F_1'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(t)}{(t-z)^2}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\left[-\frac{f_1(t)}{t-z}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1'(t)}{t-z}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1'(t)}{t-z}dt.$$

これは$f_1'(x)=\mathrm{H.F.}F_1'(z)$を意味する．さてふつうの関数としては

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\{\varphi(x)f_1(x)\}=\varphi(x)f_1'(x)+\varphi'(x)f_1(x)$$

これを超関数に見直すと

$$f'(x)=\varphi(x)\mathrm{H.F.}F_1'(z)+\varphi'(x)\mathrm{H.F.}F_1(z)$$
$$=\mathrm{H.F.}[\varphi(z)F_1'(z)]+\mathrm{H.F.}[\varphi'(z)F_1(z)] \quad (定義 7)$$
$$=\mathrm{H.F.}\frac{d}{dz}\{\varphi(z)F_1(z)\}=\mathrm{H.F.}\,F'(z).$$

これで証明が終った．▮

上の定理により，超関数の微分をつぎのように定義するのが合理的である．

〔定義 12〕 超関数$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$の微分を

$$f'(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{H.F.}\,F'(z) \tag{5.4}$$

で定義する．

[定理 4] 超関数は何回でも微分可能である．

（証明） 解析関数$F(z)$は何回でも微分可能である．したがって，上の微分の定義をくり返し使えば$f^{(N)}(x)=\mathrm{H.F.}\,F^{(N)}(z)$, $N=1,2,\cdots$, が得られる．▮

[定理 5] 超関数$f(x)$と解析関数$\varphi(x)$の積$\varphi(x)\cdot f(x)$（これ自身超関数である）の微分はふつうの関数の積の微分と同じ方法で行なうことができる．すなわち

$$\frac{d}{dx}\{\varphi(x)\cdot f(x)\}=\varphi'(x)\cdot f(x)+\varphi(x)\cdot f'(x) \tag{5.5}$$

（証明） 定義7と定義12を使えば簡単．読者にまかせる．▮

例 3 δ関数

Heaviside関数$H(x)$はふつうの関数としては$x=0$で不連続である．したがって，$x=0$を含む区間ではその微分（導関数）を考えることはできない．しかし，超関数と見直すと，上の定義12によって微分（導関数）が存在する．すなわち

$$\frac{d}{dx}H(x)=\text{H.F.}\frac{d}{dz}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\text{Log}(-z)\right\}$$
$$=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right\}.$$

これが**Diracのデルタ関数**である．すなわち

$$\delta(x)\overset{\text{def}}{=}H'(x)=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right\} \tag{5.6}$$

である．もっとも，$H(x)$ の微分というだけでは $\delta(x)=0$ $(x\neq 0)$ という性質があることぐらいしかわからない．しかし，$\delta(x)$ の母関数に注意すると

$$x\,\delta(x)=0 \tag{5.7}$$

という性質があることがわかる．実際，

$$x\,\delta(x)=\text{H.F.}\left[z\cdot\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right)\right]=-\frac{1}{2\pi i}\text{H.F.}\,1=0$$

だからである．

注意　超関数と見直すことのできるふつうの関数

有限区間で絶対積分可能のふつうの関数は定義11によってすべて超関数と見直すことができる．そのような関数としては，たとえば $\alpha>-1$ として，$|x|^\alpha$，$|x|^\alpha\log|x|$，$|x|^\alpha\operatorname{sgn}x$，$|x|^\alpha\log|x|\operatorname{sgn}x$ のようなものがある．$\alpha\leqq-1$ のばあいはどうであろうか？定義11ではそれについて何とも答えられないのである．しかし，この節で導入した微分の定義によれば，上記の関数で $\alpha\leqq-1$ のばあいに相当する超関数が得られる．たとえば，$\alpha>-1$について G.F.$|x|^\alpha$ を定義11によってつくり，H.F.$\{(d^n/dz^n)\text{G.F.}|x|^\alpha\}$ をつくれば，$|x|^{\alpha-n}$ (n=偶数) あるいは $|x|^{\alpha-n}\operatorname{sgn}x$ (n=奇数) に相当する超関数が得られる．このように，微分演算を応用することによって，ふつうお目にかかる関数はすべて超関数として見直すことができるのである．

つぎの定理はふつうの関数については周知のものであるが，超関数についてはやはり証明しておく必要がある．

[定理 6]　$f'(x)=0$ ならば，$f(x)=c$ である．ただし，c は任意の定数（超関数1の定数倍）である．

（証明）　$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすれば，

$$f'(x)=\text{H.F.}\,F'(z)=0.$$
$$\therefore\quad F'(z)=\varphi(z). \tag{5.8}$$

ここで $\varphi(z)$ は，定義5により，x軸を含む領域Dで正則な解析関数である．(5.8) を上成分と下成分に分けて，z について積分すれば

$$F(z)=\begin{bmatrix}F_+(z)\\F_-(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi(z)+c_+\\\Phi(z)+c_-\end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

ただし，c_+, c_- は任意定数で，

$$\Phi(z)=\int_c^z \varphi(z)dz \qquad (c\text{は任意定数})$$

は $\varphi(z)$ の積分として領域Dで正則である．したがって，(5.9) はつぎのように変形できる．

$$F(z)=\Phi(z)+c_-+(c_+-c_-)1_+(z) \qquad \because\ (3.3)$$
$$\cong C1(z).$$

ただし，$c_+-c_-=C$ とおいてある．上の式は $f(x)=C\cdot 1_{\text{H.F.}}$ を意味している．▮

§6.　超関数の定積分

超関数 $f(x)$ の定積分はつぎのように定義される．

〔**定義 13**〕 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int_C F(z)dz \tag{6.1}$$

である．ただし $F_\pm(z)$ は $z=a$, $z=b$ で積分可能で，積分路Cは2点 $z=a$, $z=b$ を通り母関数 $F(z)$ の正則な領域内にある任意の閉曲線とする（図2）．

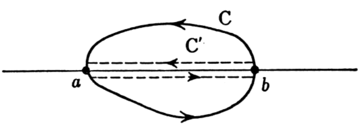


図 2

（**合理性**）　超関数 $f(x)$ を x 軸上の渦とわき出しの分布と考える立場からみると，(6.1) の左辺は渦とわき出しの総量を意味している．(6.1) の右辺は，これを D_+, D_- での渦無し(かつわき出し無し)の流れの場から計算することを表わしている．閉曲線 C を変形して，x 軸を挟む幅 2ε の平行線 C′ にすると，右辺は

$$\int_a^b \{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\}dx=\int_a^b \{\text{O.F.}f(x)\}dx$$

となるから，ふつうの関数 $f(x)$ のばあいには確かに (6.1) が成り立つのである．▮

例 4　$\delta(x)$ の積分

(5.6) により

$$\delta(x)=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right\}.$$

$$\therefore\ \int_a^b \delta(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z}=\begin{cases}1, & a<0<b\\ 0, & a<b<0,\ 0<a<b\end{cases} \tag{6.2}$$

ここで，原点 $z=0$ を囲む任意の閉曲線 C についての $1/z$ の一周積分が $2\pi i$ になることが使ってある．(6.2) は $H'(x)=\delta(x)$ として定義された δ 関数の重要な性質を示すものである．

ことばを節約するために，つぎのような定義をしておこう．

〔**定義 14**〕 $x=a$ において $F_+(z)$, $F_-(z)$ がともに正則であるとき，あるいはともに積分可能であるとき，母関数 $F(z)$ および超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ は，$x=a$ において，それぞれ**正則**あるいは**積分可能**であるという．また，$F_+(z)$, $F_-(z)$ のどちらか1つでも $x=a$ を特異点とするならば，$F(z)$ および $f(x)$ は $x=a$ で**正則でない**，あるいは，**特異である**という．

さて，ふつうの関数のばあいと同様，つぎの定理が成り立つ．

[**定理 7**] 超関数 $f'(x)$ が $x=a$, $x=b$ で積分可能ならば

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a) \tag{6.3}$$

が成り立つ．

(証明) $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ とすれば，$f'(x)=\mathrm{H.F.}\,F'(z)$ である．この $f'(x)$ を (6.1) の $f(x)$ として使うと

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &= -\int_C F'(z)dz \\ &= -\int_b^a F_+'(z)dz - \int_a^b F_-'(z)dz \qquad (\text{図 }2) \\ &= -\{F_+(a)-F_+(b)\} - \{F_-(b)-F_-(a)\} \\ &= \{F_+(b)-F_-(b)\} - \{F_+(a)-F_-(a)\} \\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

ただし，超関数の値についての定義2を使う．∎

超関数の定積分についてとくに注意すべきことは，a, b が有限でありさえすれば，どんな超関数についても定積分の値が存在することである．それは，母関数 $F(z)$ の正則な領域で積分が行なわれるからである．これはふつうの関数のばあいに見られない大きい利点である．

例 5 定理7を利用すれば，(6.2) の結果は容易に導かれる．(5.6) に注意すれば

$$\int_a^b \delta(x)dx = \int_a^b H'(x)dx = H(b)-H(a)$$

である．ところが，

$$a<0<b \text{ ならば} \qquad H(a)=0,\ H(b)=1,$$
$$a<b<0 \text{ ならば} \qquad H(a)=H(b)=0,$$
$$0<a<b \text{ ならば} \qquad H(a)=H(b)=1.$$

これから (6.2) が得られる.

例 6 $\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数とする. このとき

$$\int_a^b \varphi(x)\delta^{(m)}(x)dx=(-1)^m\varphi^{(m)}(0) \quad (a<0<b) \tag{6.4}$$

が成り立つ.

これを証明するには部分積分を行なえばよい.

§7. ま　と　め

本章では, 超関数について基本的な事項を説明した. まず, H.F. の世界を O.F. の世界にひきもどす手がかりとして, '超関数の値' という概念を定義した. これによって, 'ひきもどし' の操作 O.F. に明確な定義が与えられた. つぎに, 基本的な演算として, 線形結合, 解析関数との積, 微分, 定積分が定義された. 母関数 $F(z)=[F_+(z),\ F_-(z)]$ として任意に解析関数を選ぶことにより, いくらでも自由自在に超関数 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ をつくり出すことができるのであるが, ふつうの関数としてわれわれになじみの深いものを '超関数に見直す' という方針で, 超関数 0 と超関数 1 とをまず導入し, 手持ちの超関数の種類をふやしていくことを試みた. その結果, ふつうお目にかかる関数はほとんどすべて超関数に見直せることを知った.

超関数が何回でも微分できること, 超関数の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は, a, b が有限であるかぎり, いつでも値をもつことは超関数の大きい特長である. 超関数らしい超関数としては, Dirac の δ 関数がはじめて登場した.

3 基本的な超関数

§1. はじめに

前の章では，超関数論の基本的な考え方と，線形結合，解析関数との積，微分，定積分などの演算の規則について説明した．ふつうお目にかかる関数はほとんどすべて超関数と見直すことができるばかりではなく，δ関数のようなものまで含めて統一的に安心して扱えるようになった．この章では，基本的な超関数のいくつかの例について各論的な議論を行なうことにする．ただし，個々の超関数の性質を特徴づけるものとして，超関数の偶奇性，虚実性などについてはじめに説明しておく．

§2. $F(-z)$ を母関数とする超関数

x軸の一部または全部を含む領域 D で正則な解析関数 $F(z)$ を考えると，複素速度 $w=F(z)$ は領域 D でおこる渦無しでわき出し無しの流れを表わすことは読者諸氏もすでにご存じのとおりである．$F(z)$ はx軸上に特異性をもってもよい（図 1-a）．$F(z)$ がzの解析関数であるとすると，$F(-z)$ もzの解析関数である．そこで，$w=F(-z)$ を複素速度とする流れを考えると，これも渦無しでわき出し無しの流れである．ただし，その流れの領域 D′ は，原点 $z=0$ に関する D の鏡像である（図 1-b）．そして，流線のもようも原点に関して対称になっている．なぜかというと，2つの流れで，原点に関して対称な2点 $z, -z$ での複素速度 w が同じ値をとるからである．（領域 D での流れの原点に関する鏡像をとるかわりに，原点のまわりに 180° 回転させるといってもよい．ただし，流線のもようは 180° 回転するが，流れの向きは元と同じである．）

さて，$F(z)$ がx軸上に特異性をもつばあい，すなわち一般的にいって，x軸の上側と下側で別々の2つの解析関数 $F_+(z), F_-(z)$ の1組を $F(z)$ と考えるばあいには，x軸上に渦とわき出しの分布がある．われわれは，この渦とわき出しの分布を超関数 $f(x)$ と考え，これが母関数 $F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$ に

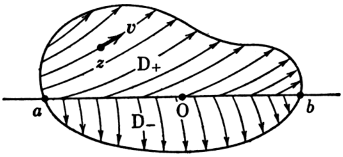


図 1–a

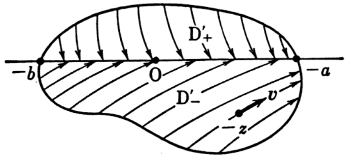


図 1–b

図 1–b は図 1–a をOのまわりに 180° 回転したもの，つまり同じ形である．矢印は逆になっている．

よってつくられるという立場をとったのである．式で表わせば

$$f(x) = \text{H.F. } F(z), \quad F(z) = \text{G.F. } f(x) \tag{2.1}$$

である．図 1–a からわかるように，$f(x)$ は区間 (a, b) で定義されたことになる．

領域 D′ で定義される $F(-z)$ を母関数とする超関数はどのようなものであろうか？　これを簡単に $f(-x)$ としてよいものだろうか？

図 1–a と図 1–b を見比べてみると，流線もようは同じであるが，流れの向きに違いがあることに気がつくだろう．すなわち，図 1–a では x 軸上に**わき出し**の分布があるのに対して，図 1–b では**すいこみ**の分布がある．つまり，符号が逆転している．これは，領域 D の x 軸の上側の部分 D_+ と下側の部分 D_- が，領域 D′ では下側の部分 D'_- と上側の部分 D'_+ にそれぞれ対応しているからである．実際，$F(z), F(-z)$ の上成分と下成分をはっきり書くと，

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_+(z) \\ F_-(z) \end{bmatrix}, \quad F(-z) = \begin{bmatrix} F_-(-z) \\ F_+(-z) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

である．したがって

$$\text{O.F. } f(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \{F_+(x+i\varepsilon) - F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{2.3}$$

に対して

$$\begin{aligned} &\text{O.F.}\{\text{H.F.} F(-z)\} \\ &\quad = \lim_{\varepsilon \to +0} \{F_-[-(x+i\varepsilon)] - F_+[-(x-i\varepsilon)]\} \\ &\quad = -\lim_{\varepsilon \to +0} \{F_+(-x+i\varepsilon) - F_-(-x-i\varepsilon)\} \\ &\quad = -\{\text{O.F. } f(x)\}(-x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

としなければならないのである．こうして，つぎの定義が合理的であることは明らかであろう．

〔定義 1〕 $f(x)=\mathrm{H.F.}\ F(z)$ とすれば

$$f(-x) \overset{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{H.F.}\ F(-z) \tag{2.5}$$

である．

この定義から容易につぎの定理が出てくる．

[定理 1]

$$f_1(x)=f_2(-x) \quad ならば \quad f_1(-x)=f_2(x) \tag{2.6}$$

である．

（証明） $f_1(x)=\mathrm{H.F.}\ F_1(z)$, $f_2(x)=\mathrm{H.F.}\ F_2(z)$ とすれば，定義1により

$$f_2(-x)=-\mathrm{H.F.}\ F_2(-z)$$

である．したがって，$f_1(x)=f_2(-x)$ は

$$F_1(z)\cong -F_2(-z)$$

を与える．ここで z を $-z$ におきかえると

$$F_2(z)\cong -F_1(-z)$$

が得られる．両辺の H.F. をとると，ふたたび定義1により，$f_2(x)=f_1(-x)$ が得られる．∎

(2.6) の内容を形式的に（$f_2(x)$ を消去した形で）表わすと

$$f_1\{-(-x)\}=f_1(x) \tag{2.7}$$

となる．ふつうの関数のばあいには，これはまったく自明の関係であって，とくに証明をする必要がない．つまり，$-(-x)=x$ だからである．しかし，超関数のばあいには，このような‘引数の中での計算’は許されない(そういう演算は定義されていない！)ので，上のような証明が必要である．しかし，この定理1によって，結果的には，引数内での $-(-x)=x$ の計算の正当性が保証されたわけである．

注意 $f(x)$ が区間 (a,b) で定義されているばあいには，$f(-x)$ が区間 $(-b,-a)$ で定義されることは明らかである．$f(x)$ の定義されている区間はもちろん母関数 $F(z)$ の定義領域 D によってきまる．すなわち D 内にある x 軸の部分である．図 1-a では領域 D を相当広くとってあるが，重要なのは x 軸に近いところだけである．D は x 軸(の全部または一部分)を含みさえすれば，どんなに幅が狭くてもよい．なお，$a=-\infty$, $b=+\infty$ になることももちろん可能である．

$F(-z)$ の上成分が $F_+(-z)$ ではなくて $F_-(-z)$ であることにとくに注意する必要がある．がんらい，$F_+(z)$ は $\mathrm{Im}\ z>0$ で定義された関数であるから，$F_+(-z)$ は $\mathrm{Im}\ z<0$

でしか定義されていない．したがって，これを上成分にすることはもともと無理な相談であることは，ちょっと考えれば気のつくことであろう．

§3. 偶超関数と奇超関数

ふつうの関数についての偶奇性の概念をそのまま超関数のばあいに適用して，つぎのように定義する．

〔**定義 2**〕 超関数 $f(x)$ は，$f(-x)=f(x)$ の関係が成り立つとき，**偶超関数**であるという．また，$f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は**奇超関数**であるという．

[定理 2] 母関数 $F(z)$ が偶(奇)関数のばあい，それのつくる超関数 $f(x)$ は奇(偶)超関数である．

(証明) $F(-z)=\pm F(z)$ とすれば，

$$\text{H.F. } F(-z)=\pm\text{H.F. } F(z).$$

$$\therefore\quad -f(-x)=\pm f(x).\quad \because\ \text{定義 1}$$

$$\therefore\quad f(-x)=\mp f(x).$$

これは $F(z)$ の偶，奇に応じて $f(x)$ が奇，偶になることを示している．∎

[定理 3] 任意の超関数は偶超関数と奇超関数に分解することができる．

(証明) $f(x)=\text{H.F. } F(z)$ とする．$F(z)$ はつぎのように偶，奇の部分に分解することができる．

$$F(z)=F_e(z)+F_o(z), \tag{3.1}$$

ただし

$$F_e(z)=\frac{1}{2}\{F(z)+F(-z)\}, \tag{3.2}$$

$$F_o(z)=\frac{1}{2}\{F(z)-F(-z)\}. \tag{3.3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{H.F. } F_e(z)+\text{H.F. } F_o(z) \\ &= f_o(x)+f_e(x). \end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし

$$\begin{aligned} f_o(x) &= \text{H.F. } F_e(z) \\ &= \frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \text{H.F. } F_o(z) \\ &= \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

とおいてある．

$F_e(z)$, $F_o(z)$ はそれぞれ偶および奇関数であるから，定理2により $f_e(x)$, $f_o(x)$ はそれぞれ偶および奇超関数である．∎

さて，上の定理によれば，母関数が偶(奇)であれば超関数は奇(偶)である．しかし，逆に，超関数が奇(偶)であるからといって，それをつくる母関数は必ずしも偶(奇)であるとは限らない．母関数には領域 D で正則な解析関数だけの不定性があるからである．しかし，つぎの定理によれば，母関数をそれと**同等な**関数でおきかえることによって，期待どおりの偶奇性をもたせることができる．

[定理 4]　超関数 $f(x)$ が偶ならばその母関数 $F(z)$ を $F_o(z)$ で，また奇ならば $F_e(z)$ で，おきかえることができる．ただし，

$$F_{e,o}(z) = \frac{1}{2}\{F(z)\pm F(-z)\}$$

である．

（証明）$f(x)$ を (3.4) のように分解する．もしも $f(x)$ が偶ならば，$f_o(x)=0$ である．したがって，$f(x)=f_e(x)$．すなわち，(3.6) により，H.F. $F(z)$ = H.F. $F_o(z)$．これは $F(z)\cong F_o(z)$ を意味する．$f(x)$ が奇のばあいには，同様にして $F(z)\cong F_e(z)$ であることがわかる．∎

例 1　$F(z)=[z,0]$ の分解

$$F(z)=\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix},\quad F(-z)=\begin{bmatrix} 0 \\ -z \end{bmatrix}.$$

$$F_e(z)=\frac{1}{2}\{F(z)+F(-z)\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix},$$

$$F_o(z)=\frac{1}{2}\{F(z)-F(-z)\}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix}\cong 0.$$

$$f_e(x)=\text{H.F.}\,F_o(z)=0,$$

$$f_o(x)=\text{H.F.}\,F_e(z)=x.$$

すなわち，$f(x)=x$ は奇超関数である．(当然！) 母関数 $F(z)$ 自身は偶関数ではないが，$F_o(z)$ が 0 と同等であるから，$F(z)$ を偶関数 $F_e(z)$ でおきかえることができる．

例 2　$F(z)=[1/z,0]$ の分解

$$F(z)=\begin{bmatrix} 1/z \\ 0 \end{bmatrix},\quad F(-z)=\begin{bmatrix} 0 \\ -1/z \end{bmatrix}.$$

$$F_e(z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/z \\ -1/z \end{bmatrix},\quad F_o(z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/z \\ 1/z \end{bmatrix}.$$

こんどは $F_o(z)\cong 0$ とするわけにはいかない．$1/z$ が x 軸上で正則ではないからである．すなわち，この母関数 $F(z)$ は偶・奇の両成分を本質的に含んでいる．

$F_o(z)$ は上下両成分が同一の関数であるから，簡単に $F_o(z)=1/(2z)$ と書いてもよい．§2.5の例3で導入した**δ関数**の定義式：

$$\delta(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right]$$

を思い出すと，

$$f_e(x) = \text{H.F.}\, F_o(z) = -\pi i\delta(x)$$

であることがわかるだろう．$f_o(x)=\text{H.F.}\,F_e(z)$ がどんな超関数を表わすかについては，いまのところ不明である．

超関数の偶奇性についてはつぎの定理が成り立つ．

[定理 5]　$f(x)$ を偶(奇)超関数とする．このとき，

（i）$f'(x)$ は奇(偶)超関数である．

（ii）x 軸上で正則な解析関数 $\varphi(x)$ との積 $\varphi(x)f(x)$ は，$\varphi(x)$ が偶関数ならば偶(奇)超関数，$\varphi(x)$ が奇関数ならば奇(偶)超関数である．

(証明)（i）上の定理4により，$f(x)=\pm f(-x)$ に応じて $F(z)=\mp F(-z)$ と仮定してもよい．したがって，$F'(z)=\pm F'(-z)$．したがって，$\text{H.F.}\,F'(z)=\pm\text{H.F.}\,F'(-z)$．すなわち $f'(x)=\mp f'(-x)$．これは $f(x)$ と $f'(x)$ の偶奇性が入れかわることを意味する．

（ii）$\varphi(x)f(x)=\text{H.F.}\,\varphi(z)F(z)$．$\varphi(z)$ と $F(z)$ の偶奇性から，上の（ii）の結果がただちに得られる．▮

§4.　$\bar{F}(z)$ を母関数とする超関数

$w=F(z)$ を複素速度とする流れに対して，$w=F(-z)$ を複素速度とする流れは原点 $z=0$ に関する鏡像の流れであった．いま，原点に関する鏡像をとるかわりに，x 軸に関する鏡像をとっても，やはり渦無しでわき出し無しの流れが得られる．これを表わす複素速度は $w=\overline{F(\bar{z})}$ で与えられる．(図1のような図を描いてなっとくされることを読者諸氏におすすめする.) $w=\overline{F(\bar{z})}$ が渦無しでわき出しの流れを表わすことから，$\overline{F(\bar{z})}$ は z の解析関数でなければならない．(これは **Cauchy-Riemann の関係式**を使えば容易に証明できる.) この解析関数を $\bar{F}(z)$ と書き表わすことにしよう．すなわち

$$\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})} \tag{4.1}$$

である．

$F(-z)$ についてしたように，$F(z)$ と $\bar{F}(z)$ の上成分と下成分をはっきり書き表わすと，

$$F(z)=\begin{bmatrix}F_+(z)\\F_-(z)\end{bmatrix},\quad \bar{F}(z)=\begin{bmatrix}\bar{F}_-(z)\\\bar{F}_+(z)\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

である．$\bar{F}(z)$ の上成分が $\bar{F}_-(z)=\overline{F_-(\bar{z})}$ であることにとくに注意するべきである．（その理由は $F(-z)$ のばあいと同様である．）

さて，解析関数 $\bar{F}(z)$ を母関数とする超関数はどんなものであろうか？　まず，$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ に対して

$$\text{O.F.}\,f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{4.3}$$

である．$\bar{F}(z)=\overline{F(\bar{z})}$ であるから

$$\begin{aligned}\text{O.F.}\{\text{H.F.}\,\bar{F}(z)\}&=\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_-(\overline{x+i\varepsilon})-F_+(\overline{x-i\varepsilon})\}^*\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\{F_-(x-i\varepsilon)-F_+(x+i\varepsilon)\}^*\\&=-\{\text{O.F.}\,f(x)\}^*\end{aligned}$$

ただし，* 印は**複素共役**を表わす（横棒では書きにくいので）．上の等式は**超関数の複素共役**をつぎのように定義するのが合理的であることを示している．

〔**定義 3**〕 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすれば

$$\overline{f(x)}\overset{\text{def}}{=}-\text{H.F.}\,\bar{F}(z) \tag{4.4}$$

である．

［定理 6］ 超関数 $f(x)$ およびその母関数 $F(z)$ の偶奇性はこれらに複素共役な $\overline{f(x)}$ および $\bar{F}(z)$ の偶奇性と同じである．

（証明） $F(z)$ の偶，奇に応じて $F(z)=\pm F(-z)$．したがって，$\overline{F(z)}=\pm\overline{F(-z)}$．すなわち $\bar{F}(\bar{z})=\pm\bar{F}(-\bar{z})$．$\bar{z}\to z$ とおきかえると，$\bar{F}(z)=\pm\bar{F}(-z)$．これは $\bar{F}(z)$ が $F(z)$ と同じ偶奇性をもつことを示している．つぎに，定理 2 により超関数と母関数の偶奇性は正反対であるから，$\overline{f(x)}$ と $f(x)$ とは同じ偶奇性をもつことになる．∎

§5. 実超関数と虚超関数

ふつうの関数 $f(x)$ が実数値をとるばあい $\overline{f(x)}=f(x)$，純虚数値をとるばあい $\overline{f(x)}=-f(x)$ であることはもちろんである．そこで，超関数についてつぎのように定義するのは自然であろう．

〔**定義 4**〕 超関数$f(x)$は，$\overline{f(x)}=f(x)$ の関係が成り立つとき，**実超関数**であるという．また，$\overline{f(x)}=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は**虚超関数**であるという．

超関数 $f(x)$ の複素共役 $\overline{f(x)}$ は定義3によって母関数 $F(z)$ の複素共役 $\bar{F}(z)$ に関係づけられているから，超関数の**虚実性**も母関数の虚実性に関連があるだろう．そこで，母関数の虚実性についてつぎのような定義を与えておく．

〔**定義 5**〕 母関数 $F(z)$ は，$\bar{F}(z)=F(z)$ の関係が成り立つとき**実数型**であるといい，$\bar{F}(z)=-F(z)$ が成り立つとき**虚数型**であるという．

実は，この定義5はふつうの解析関数についてすでに適用されるべきものであって，超関数論としてはこと新しく定義するまでもない．（前節で超関数の**偶奇性**を定義したときには，母関数の偶奇性はとくに定義しなかった．これは，ふつうの関数として読者もよくご存じのことと考えたからである．）実際，$\bar{F}(z)=F(z)$ が成り立つ解析関数は x 軸上で実数値をとり，$\bar{F}(z)=-F(z)$ が成り立てば x 軸上で純虚数値をとることは明らかだからである．

[定理 7] 母関数 $F(z)$ が実(虚)数型ならば，超関数$f(x)$は虚(実)である．

（証明） 定義3, 4, 5から明らか．∎

[定理 8] 任意の母関数とそのつくる超関数は実数部分と虚数部分に分解することができる．その際，母関数の実(虚)数部分は超関数の虚(実)数部分に対応する．

（証明） $F(z)$ はつぎのように分解できる:

$$F(z)=F_r(z)+iF_i(z), \tag{5.1}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} F_r(z)&=\frac{1}{2}\{F(z)+\bar{F}(z)\},\\ F_i(z)&=\frac{1}{2i}\{F(z)-\bar{F}(z)\}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

したがって

$$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)=\text{Re}\,f(x)+i\,\text{Im}\,f(x), \tag{5.3}$$

ただし

$$\text{Re}\,f(x)=\text{H.F.}\{iF_i(z)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+\overline{f(x)}\}, \tag{5.4}$$

$$i\,\mathrm{Im}\,f(x) = \text{H.F.}\{F_r(z)\} = \frac{1}{2}\{f(x)-\overline{f(x)}\} \tag{5.5}$$

が得られる．ここで定義3が使ってある．(5.1), (5.3) はそれぞれ母関数および超関数の分解を示し，(5.4), (5.5) はそれらの実数部分と虚数部分の対応を示している．∎

注意　$f(x)=\mathrm{Re}\,f(x)+i\,\mathrm{Im}\,f(x)$ とするとき，$\mathrm{Re}\,f(x)$, $\mathrm{Im}\,f(x)$ をそれぞれ**実(数)部**，**虚(数)部**というのがふつうである．しかし，ここでは，便宜上 $\mathrm{Re}\,f(x)$ を**実数部分**，$i\,\mathrm{Im}\,f(x)$ を**虚数部分**と称している．

[定理 9]　実(虚)超関数 $f(x)$ はその母関数 $F(z)$ を $iF_i(z)$($F_r(z)$) でおきかえることができる．ただし，

$$F_r(z) = \frac{1}{2}\{F(z)+\bar{F}(z)\},$$

$$iF_i(z) = \frac{1}{2}\{F(z)-\bar{F}(z)\}$$

である．

（証明）　定理4の証明にならって行なうことができる．読者にまかせる．∎

[定理 10]　超関数を $f(x)$，その母関数を $F(z)$ とする．このとき，

（i）　微分に際して $f(x)$ と $F(z)$ の虚実性は不変である．

（ii）　x 軸上で正則な解析関数 $\varphi(x)$ との積 $\varphi(x)f(x)$ は，$\varphi(x)$ が実(虚)ならば $f(x)$ と同じ(異なる)虚実性をもつ．

（証明）　容易である．読者にまかせる．∎

例 3　$F(z)=[z,0]$ の分解

例1では $F(z)$ を偶と奇の部分に分解したが，こんどは実と虚の部分に分解してみよう．

$$F(z) = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}.$$

$$F_r(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} \cong 0, \quad iF_i(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Re}\,f(x) = \text{H.F.}\{iF_i(z)\} = x,$$

$$i\,\mathrm{Im}\,f(x) = \text{H.F.}\{F_r(z)\} = 0.$$

例 4　$F(z)=[1/z,0]$ の分解

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1/z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/z \end{bmatrix}.$$

$$F_r(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/z \\ 1/z \end{bmatrix} = \frac{1}{2z}, \quad iF_i(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/z \\ -1/z \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} f(x) = \text{H.F.}\{iF_i(z)\} = ?$$
$$i \operatorname{Im} f(x) = \text{H.F.}\{F_r(z)\} = -\pi i\delta(x).$$

例2と比べてみると，いまのばあい $F_r(z)=F_o(z)$, $F_i(z)=F_e(z)$ の関係があることがわかる．

例 5 $\mathbf{1}(z)$, $\mathbf{1}_+(z)$, $\mathbf{1}_-(z)$ の分解

これらは (2.3.3) で定義され，すべて超関数1の母関数である．これらについて $\mathbf{1}(-z)$, $\bar{\mathbf{1}}(z)$, … などを考えよう．

$$\mathbf{1}(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_+(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_-(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{1}(-z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_+(-z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_-(-z) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
$$\bar{\mathbf{1}}(z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{1}}_+(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{1}}_-(z) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

したがって

$$\mathbf{1}(z) = -\mathbf{1}(-z) = -\bar{\mathbf{1}}(z), \tag{5.6}$$
$$\mathbf{1}_+(-z) = \bar{\mathbf{1}}_+(z) = -\mathbf{1}_-(z), \tag{5.7}$$
$$\mathbf{1}_-(-z) = \bar{\mathbf{1}}_-(z) = -\mathbf{1}_+(z). \tag{5.8}$$

(5.6) は，$\mathbf{1}(z)$ が奇で虚数型であることを示している．したがって，超関数 $1=\text{H.F.}\,\mathbf{1}(z)$ は，当然期待されるように，偶で実の超関数である．一方，$\mathbf{1}_+(z)$, $\mathbf{1}_-(z)$ は，$z \to -z$ および複素共役をとる変換に際して，たがいに入れかわることがわかる．つまり，これらは $\mathbf{1}(z)$ と同等であるにもかかわらず，その性質は複雑である．実際，(2.3.5) の関係

$$\mathbf{1}_\pm(z) = \mathbf{1}(z) \pm \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

は $\mathbf{1}_+(z)$, $\mathbf{1}_-(z)$ の奇・偶の分解と虚・実の分解を示している．(定数1/2が母関数としては偶で実数型であることは明らかであろう．)

§6. 1価解析関数は超関数と見直される

x軸上で正則な解析関数 $\phi(x)$ が $\phi(x)\cdot 1_{\text{H.F.}}$ によって超関数と見直されることはすでに定義2.9として述べた．$\phi(z)$ がx軸上に特異点をもつばあいはどうであろうか？ たとえば $\phi(z)=1/z$ を考えよう．このばあい $\phi(x)$ は $x=0$ を含む区間で**絶対積分不可能**であるから，定義2.11を利用して母関数を見出すことはできない．それでは $\phi(x)\cdot 1_{\text{H.F.}}=\text{H.F.}\{\phi(z)\mathbf{1}(z)\}$ をそのまま使えばどうだろう？ 残念ながら，これは許されない．$\phi(z)$ がx軸上に特異点をもつばあいについては積は定義されていないからである．実際，超関数1をつくる母関数としては，$\mathbf{1}(z)$ のほかに，それと同等な $\mathbf{1}_+(z)$, $\mathbf{1}_-(z)$ がある．ところが，(5.9) により

$$\phi(z)\mathbf{1}_{\pm}(z)=\phi(z)\mathbf{1}(z)\pm\frac{1}{2}\phi(z) \tag{6.1}$$

である．したがって

$$\text{H.F.}\{\phi(z)\mathbf{1}_{\pm}(z)\}=\text{H.F.}\{\phi(z)\mathbf{1}(z)\}\pm\frac{1}{2}\text{H.F.}\,\phi(z) \tag{6.2}$$

となり，$1_{\text{H.F.}}$ の母関数の選び方によって，異なる超関数が得られることになる．($\phi(z)=1/z$ のばあいには，(6.2) の右辺の最後の項は $\mp\pi i\delta(x)$ となる．)

もっとも，(6.2) の両辺の O.F. をとると，$\phi(z)$ が1価関数のばあいには，特異点以外では

$$\text{O.F.}\{\text{H.F.}\,\phi(z)\}=\lim_{\varepsilon\to+0}\{\phi(x+i\varepsilon)-\phi(x-i\varepsilon)\}=0 \tag{6.3}$$

であるから，O.F. の世界にひきもどしたときには，$\mathbf{1}(z)$, $\mathbf{1}_{+}(z)$, $\mathbf{1}_{-}(z)$ のいずれを $1_{\text{H.F.}}$ の母関数に選んでも同じになる．しかし，$\phi(x)_{\text{O.F.}}$ を見直して得られる超関数 $\phi(x)_{\text{H.F.}}$ がもとと同じ偶奇性，虚実性をもつことを要請すると，$\mathbf{1}(z)$ を選択することが最も合理的であることがわかる．

実際，$\mathbf{1}(z)$ は奇であるから，$\phi(z)$ の偶・奇に応じて $\phi(z)\mathbf{1}(z)$ は奇・偶となり，定理2により，H.F.$\{\phi(z)\mathbf{1}(z)\}$ は偶・奇となる．また，$\mathbf{1}(z)$ は虚数型であるから，$\phi(z)$ の実・虚に応じて $\phi(z)\mathbf{1}(z)$ は虚・実となり，定理7により，H.F.$\{\phi(z)\mathbf{1}(z)\}$ は実・虚となるのである．

以上の考察から，つぎの定義に導かれる．

〔**定義 6**〕 1価解析関数 $\phi(z)$ から

$$\phi(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\{\phi(z)\mathbf{1}(z)\} \tag{6.4}$$

によって超関数 $\phi(x)$ を定義する．

〔**定義 7**〕 1価解析関数から見直された2つの超関数の積をつぎのように定義する．

$$\phi_1(x)\cdot\phi_2(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\{\phi_1(z)\phi_2(z)\mathbf{1}(z)\}. \tag{6.5}$$

これらの定義の合理性はつぎの定理によって裏づけられる．

[**定理 11**] 1価解析関数から見直された超関数は，ふつうの関数と同じ方法で線形結合，積，微分の演算を行なうことができる．

(証明) 線形結合については証明するまでもない．積については (6.5) の定義式から明らかである．微分については，(6.4) に微分の定義 2.12 を適用することによって

$$\psi'(x) = \text{H.F.}\left[\frac{d}{dz}\{\psi(z)\mathbf{1}(z)\}\right]$$
$$= \text{H.F.}\{\psi'(z)\mathbf{1}(z)\} \quad \because \quad \frac{d}{dz}\mathbf{1}(z) = 0$$

が得られる．これは超関数 $\psi'(x)$ がふつうの関数 $\psi'(x)$ を見直したものであることを示している．▮

[定理 12] 1価解析関数から見直された超関数 $\psi(x)$ の積分は

$$\int_a^b \psi(x)dx = \mathrm{P}\int_a^b \psi(x)dx \tag{6.6}$$

で与えられる．ただし右辺の積分は

$$\mathrm{P}\int_a^b \psi(x)dx \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{a(+)}^b + \int_{a(-)}^b\right)\psi(z)dz \tag{6.7}$$

を意味する．右辺は複素積分で，第1および第2の積分の積分路はそれぞれ上半平面および下半平面で a と b を結ぶ曲線（図2の破線で示す）である．

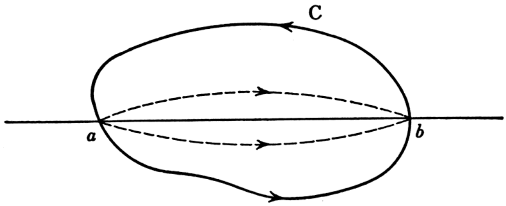


図 2

（証明） 超関数の積分は

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{\mathrm{C}} F(z)dz \tag{6.8}$$

によって定義される（定義 2.13）．ただし，C は a, b を通る任意の閉曲線である（図2）．

$f(x)=\psi(x)$, $F(z)=\psi(z)\mathbf{1}(z)$ を代入し， $\mathbf{1}(z)=[1/2, -1/2]$ を考慮すれば，ただちに (6.6), (6.7) が得られる．▮

§7. Cauchy の主値

x 軸上で正則な任意の解析関数を $\varphi(z)$ とし，$\psi(z)=\varphi(z)/z$ とおくと，$\psi(z)$ は $z=0$ に1位の極をもつ1価解析関数である．したがって，定理 12 により

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}dx = \mathrm{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{7.1}$$

が得られる．いま $\varphi(0)\neq 0$, $a<0<b$ とすれば，ふつうの関数の積分としては (7.1) の左辺は発散する．しかし，右辺の積分は (6.7) によって意味がある．積分路として，とくに図3に示すようなものをとる．すなわち，原点を中心とする半径 ε の小さい半円に沿って原点を上下に避けて進むような路である．そうすると

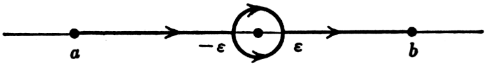


図 3

$$\int_{a(\pm)}^{b}=\int_{a}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{b}+\int_{-\varepsilon(\pm)}^{\varepsilon} \tag{7.2}$$

であるが，第3項は

$$\int_{-\varepsilon(\pm)}^{\varepsilon}\frac{\varphi(z)}{z}dz=\int_{-\varepsilon(\pm)}^{\varepsilon}\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}dz+\varphi(0)\int_{-\varepsilon(\pm)}^{\varepsilon}\frac{dz}{z}$$

と書きかえられる．$\varepsilon\to 0$ のときこの第1項は0，第2項は $\mp\pi i\varphi(0)$ となる．したがって，上下の積分の和をとると，$\varepsilon\to 0$ の極限では (7.2) の右辺の第3項は消える．けっきょく

$$\mathrm{P}\int_{a}^{b}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{b}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{7.3}$$

となる．この右辺は **Cauchy の主値**とよばれるものである．このように，$\varphi(x)/x$ を超関数と解釈することによって Cauchy の主値が自然に得られるのである．

なお，$\mathrm{P}\int_{a}^{b}$ はつぎのようにしてふつうの積分で表わすこともできる．まず

$$\frac{\varphi(z)}{z}=\frac{d}{dz}\{\varphi(z)\,\mathrm{Log}\,z\}-\varphi'(z)\,\mathrm{Log}\,z \tag{7.4}$$

と書きかえる．ここに $\mathrm{Log}\,z$ は**対数関数の主値**，すなわち $-\pi<\arg z<\pi$ の条件によって $\log z$ を1価にしたものを表わす．したがって，x 軸の負の部分に沿って z 平面に切目を入れたことに相当する．それゆえ，x 軸に沿っては，

$$\mathrm{Log}\,z=\log|x|\pm\pi iH(-x) \tag{7.5}$$

が成り立つ．ただし，上号は x 軸に上側から近づくばあい，下号は下側から近づくばあいを表わす．また，$H(x)$ は **Heaviside の関数**であって，$H(-x)=1\,(x<0),\ 0\,(x>0)$ である．(7.4), (7.5) を使うと，

$$\int_{a(\pm)}^{b}\frac{\varphi(z)}{z}dz=\varphi(b)\log b-\varphi(a)\{\log|a|\pm\pi i\}$$
$$-\int_{a}^{b}\varphi'(x)\{\log|x|\pm\pi iH(-x)\}dx.$$

上下の積分の和をとると±の項が消えて，けっきょく

$$\mathrm{P}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}dx = \varphi(b)\log b - \varphi(a)\log|a| - \int_a^b \varphi'(x)\log|x|dx \quad (7.6)$$

が得られる．右辺の積分はふつうの積分として確かに意味をもつのである．|

例 6 $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x^{m+1}}dx \quad (m=0,1,2,\cdots)$

$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な任意の解析関数とする．$\phi(z)=\varphi(z)/z^{m+1}$ として (6.6) を使う．まず

$$\frac{\varphi(z)}{z^{m+1}} = -\frac{1}{m}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\varphi(z)}{z^m}\right\} + \frac{1}{m}\frac{\varphi'(z)}{z^m}.$$

この関係をくり返し使えば

$$\frac{\varphi(z)}{z^{m+1}} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{m}\frac{\varphi(z)}{z^m} + \frac{1}{m(m-1)}\frac{\varphi'(z)}{z^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{m!}\frac{\varphi^{(m-1)}(z)}{z}\right\}$$
$$+\frac{1}{m!}\frac{\varphi^{(m)}(z)}{z}$$

が得られる．これを (6.6) に代入すれば

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x^{m+1}}dx = -\left[\frac{1}{m}\left\{\frac{\varphi(b)}{b^m} - \frac{\varphi(a)}{a^m}\right\} + \frac{1}{m(m-1)}\left\{\frac{\varphi'(b)}{b^{m-1}} - \frac{\varphi'(a)}{a^{m-1}}\right\}\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{1}{m!}\left\{\frac{\varphi^{(m-1)}(b)}{b} - \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{a}\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{m!}\mathrm{P}\int_a^b \frac{\varphi^{(m)}(x)}{x}dx \quad (7.7)$$

となる．右辺の最後の項は Cauchy の主値として，あるいは (7.6) によって計算できる．けっきょく，$\varphi(x)/x^{m+1}$ を超関数と見直すことによって，左辺の定積分が疑義なく計算できるのである．

注意 区間 (a,b) 内の 1 点，たとえば $x=0$ で $\phi(x)$ が ∞ になるばあい，Cauchy の主値として

$$\mathrm{P}\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^b\right)\phi(x)dx \quad (7.8)$$

を考えれば定積分の値が計算できる――こう考えるのは**間違い**である！ (7.8) 式が有効なのは，$x=0$ が**奇数位の極**のばあいに限るのである．たとえば $\phi(x)=1/x^2$ とすると，(7.8) の右辺は $+\infty$ になる．ところが，例 6 の計算方式，すなわち (7.7) を使うと，$\varphi(x)=1$，$m=1$ とおいて，

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \quad (7.9)$$

が得られる．$a<0<b$ が仮定されているから，この右辺は負である．すなわち，被積分関数がいたるところ正であるにもかかわらず，積分値は負である！ そして，$a\to-\infty$，$b\to+\infty$ のときにはじめて積分値は 0 になる．これは一見奇妙な結果であるが，実は超関数 $1/x^2$ は $x=0$ で $-\infty$ の値をとると考えればなっとくされる．つまり，$x\neq 0$ には $1/x^2$ に

相当する**連続的な渦の分布**があり，$x=0$ にはその渦分布を打ち消すだけの無限大の強さの**孤立した渦**があると考えられるのである．

なお，主値の定義として (6.7) を採用すれば，$\phi(x)$ の極の位数に関係なく合理的な結果が得られる．($\phi(z)=1/z^2$ として，直接 (6.7) 式を使って (7.9) の結果を求めよ．)

§8. $f(ax+b)$ の形の超関数

超関数 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ が与えられたとき，$f(-x)$，$\overline{f(x)}$ という形の超関数がそれぞれ

$$f(-x) = -\text{H.F.}\,F(-z), \tag{8.1}$$

$$\overline{f(x)} = -\text{H.F.}\,\bar{F}(z), \quad \bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})} \tag{8.2}$$

として定義されることはすでに述べたとおりである．(8.1) は超関数 $f(x)$ の引数 x を $-x$ に変えることによって新しい超関数 $f(-x)$ をつくり出すことを意味している．この操作を一般化して，引数 x を $ax+b$ (ただし a, b は実数の定数) に変えるには，つぎの定義を使えばよい．

〔**定義 8**〕 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすれば

$$f(ax+b) \overset{\text{def}}{=} \text{sgn}\,a\,\text{H.F.}\,F(az+b) \tag{8.3}$$

である．ただし，a, b は実数の定数である．

この定義が合理的であることは，前に (1.1) について行なったのとまったく同様の方法で示すことができる．(読者諸氏にまかせる．) なお，(8.2) を併用すると

$$\overline{f(ax+b)} = -\text{sgn}\,a\,\text{H.F.}\,\bar{F}(az+b) \tag{8.4}$$

であることがただちにわかるだろう．

a, b が**実数**であることはとくに注意する必要がある．超関数 $f(x)$ の引数 x はもちろん実数であるから，新しい超関数 $f(ax+b)$ の引数 $ax+b$ は実数でなければならず，したがって a, b はともに実数でなければならないからである．

§9. 超関数と1価解析関数の形式積

$f(x)$ を超関数，$F(z)$ をそれの母関数，すなわち $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とする．いま，$\varphi(z)$ を x 軸上で正則な解析関数とすると，$f(x)$ と $\varphi(x)$ の積として超関数 $\varphi(x)f(x)=\text{H.F.}\,\varphi(z)F(z)$ が定義されることは読者もすでにご承知のとおりである．さて，解析関数 $\phi(z)$ が x 軸上に特異点をもつばあいにも，$f(x)$ と $\phi(x)$ の積を考えることができるだろうか？ それには，一応

$$\phi(x)f(x) = \text{H.F.}\,\phi(z)F(z) \tag{9.1}$$

とすればよさそうである．しかし，母関数 $F(z)=\text{G.F.}f(x)$ には x 軸上で正則な任意の解析関数 $\varphi(z)$ だけの不定性がある．したがって，一般に

$$F(z) = F_0(z)+\varphi(z) \tag{9.2}$$

と書き表わすことができる．ただし，$F_0(z)$ は母関数の1つを適当に選んだものである．そこで，(9.2) を (9.1) の右辺に代入すると

$$\text{H.F.}\,\phi(z)F(z) = \text{H.F.}\,\phi(z)F_0(z)+\text{H.F.}\,\phi(z)\varphi(z)$$

となるが，右辺では H.F.$\phi(z)\varphi(z)$ で与えられる超関数だけの不定性が現われる．もしも $\phi(z)$ が x 軸上で正則であれば，$\phi(z)\varphi(z)$ も x 軸上で正則となり，したがって H.F. $\phi(z)\varphi(z)=0$ となって不定性は消滅する．（このばあい $f(x)$ と $\phi(x)$ の積が (9.1) によって一義的に定義される.）ところが，$\phi(z)$ が x 軸上に特異点をもつばあいには，不定性が残り，したがって (9.1) によっては一義的に確定した超関数を表わすことはできない．

この難点を避けるために，つぎのような処置をとることにする．すなわち，与えられた超関数 $f(x)$ に対して，母関数の1つ $F(z)$ を適当に決めておく．そして $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ の式に現われる $F(z)$ として，いつでもその $F(z)$ を使うことにするのである．こうして，$f(x)$ と $\phi(x)$ の積を**形式的に** (9.1) によって定義する．

さて，超関数 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ が与えられると，その導超関数 $f^{(n)}(x)=\text{H.F.}\,F^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ がつぎつぎと導かれる．これらに対しても $\phi(x)$ との**形式的な積**を (9.1) と同様に定義することができる．これを定義の形にまとめておこう．

〔**定義 9**〕 超関数 $f(x)$ およびその導超関数 $f^{(n)}(x)$ と1価解析関数 $\phi(x)$ との**形式積**をつぎのように定義する．

$$\phi(x)\circ f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\phi(z)F^{(n)}(z)\} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{9.3}$$

ただし，母関数 $F(z)=\text{G.F.}f(x)$ は（同等な母関数の中からあらかじめ適当に選んだ）ある1つのものに決めておく．形式積を表わすのに記号 ∘ を用いる．$\phi(z)$ が x 軸上で正則なばあいには，形式積はふつうの積と一致する．

[**定理 13**] $\phi(z)$ は1価解析関数，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数，$f(x)$ は超関数とする．このとき，形式積についてつぎの関係が成り立つ．

$$\{\phi_1(x)+\phi_2(x)\}\circ f(x) = \phi_1(x)\circ f(x)+\phi_2(x)\circ f(x), \tag{9.4}$$

$$\varphi(x)\cdot\{\psi(x)\circ f(x)\} = \{\varphi(x)\psi(x)\}\circ f(x), \tag{9.5}$$

$$\psi(x)\circ\{f_1(x)+f_2(x)\} = \psi(x)\circ f_1(x)+\psi(x)\circ f_2(x), \tag{9.6}$$

$$\frac{d}{dx}\{\psi(x)\circ f(x)\} = \psi'(x)\circ f(x)+\psi(x)\circ f'(x). \tag{9.7}$$

$f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ についても上と同様な関係が成り立つ．すなわち，形式積は線形結合，解析関数との積，および微分に関して，ふつうの積と同様にふるまう．

（証明）　形式積の定義を使えば証明は簡単である．ここでは (9.5) と (9.7) だけを考えよう．(9.5) の左辺は超関数 $\psi(x)\circ f(x)$ と解析関数の**積**である．また，右辺は超関数 $f(x)$ と 1 価解析関数 $\varphi(x)\psi(x)$ の**形式積**である．この両者が同一の超関数を表わすというのが等式 (9.5) の意味である．さて

$$\begin{aligned}&\varphi(x)\cdot\{\psi(x)\circ f(x)\}\\ &\quad= \mathrm{H.F.}[\varphi(z)\{\psi(z)F(z)\}] &&\because\ \text{積の定義}\\ &\quad= \mathrm{H.F.}[\{\varphi(z)\psi(z)\}F(z)]\\ &\quad= \{\varphi(x)\psi(x)\}\circ f(x). &&\because\ \text{形式積の定義}\end{aligned}$$

これで (9.5) 式は証明された．つぎに

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\{\psi(x)\circ f(x)\}\\ &\quad= \mathrm{H.F.}\left[\frac{d}{dz}\{\psi(z)F(z)\}\right] &&\because\ \text{微分の定義}\\ &\quad= \mathrm{H.F.}[\psi'(z)F(z)+\psi(z)F'(z)]\\ &\quad= \psi'(x)\circ f(x)+\psi(x)\circ f'(x). &&\because\ \text{形式積の定義}\end{aligned}$$

これは (9.7) にほかならない．∎

形式積の定義 (9.3) によれば，超関数 $f(x)$ を 1 つ，1 価解析関数 $\psi(x)$ を 1 つ与えたとしても，$n=0,1,2\cdots$ に応じて無限個の超関数 $\psi(x)\circ f^{(n)}(x)$ が新しく定義されることになる．たとえば

$$\psi(x)=\frac{1}{x},\quad f(x)=\delta(x)$$

とすると

$$\frac{1}{x}\circ\delta(x),\ \ \frac{1}{x}\circ\delta'(x),\ \ \frac{1}{x}\circ\delta''(x),\cdots$$

はすべて新しく定義された超関数である．さて (2.5.6) により

$$\delta(x)=\mathrm{H.F.}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\right),\quad j=2\pi i \tag{9.8}$$

であるから，$\delta(x)$ に対する母関数として

$$F(z)=-\frac{1}{j}\frac{1}{z} \tag{9.9}$$

をとることができる．(今後，式を見易くするために，随時 $j=2\pi i$ と書くことにする．) したがって，(9.3) により

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\circ\delta^{(n)}(x)&=\text{H.F.}\left\{\frac{1}{z}\frac{d^n}{dz^n}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\right)\right\}\\&=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}\right\}\\&=\text{H.F.}\left\{(-1)^n n!\,\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{n+1}\text{H.F.}\,F^{(n+1)}(z)=-\frac{1}{n+1}\delta^{(n+1)}(x).\end{aligned}$$

すなわち，新しく定義された超関数 $x^{-1}\circ\delta^{(n)}(x)$ は実は既知の超関数 $\delta(x)$ の導超関数で表わすことができるのである．これは，$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, … などの三角関数がすべて e^{ix} を使って表わすことができるのと同様である．

なお，一般に1価解析関数 $\phi(z)$ は部分分数に展開して

$$\phi(z)=\sum_{p,m}\frac{A_{p,m}}{(z-a_p)^m}+\varphi(z),\quad a_p=\text{実数} \tag{9.10}$$

の形に表わすことができる．ただし $\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数である．それゆえ，定理13の (9.4) により，$\phi(x)\circ f^{(n)}(x)$ は

$$\frac{1}{(x-a)^m}\circ f^{(n)}(x) \tag{9.11}$$

の形の超関数の線形結合として表わすことができる．この (9.11) 自身も，たとえばつぎの例7に示すように，さらに簡単な超関数を使って表わすことができる．

例 7 $\dfrac{1}{x-a}\circ\delta(x)$, $a\neq 0$

これは $\delta(x)$ と $(x-a)^{-1}$ の**積**では**ない**．**積の形の**超関数，すなわち**形式積**である．

G.F. $\delta(x)=-\dfrac{1}{j}\dfrac{1}{z}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a}\circ\delta(x)&=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\frac{1}{(z-a)z}\right\}\\&=\text{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z}\right)\right\}\\&=\frac{1}{a}\left\{\text{H.F.}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z-a}\right)-\text{H.F.}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a}\Big\{\delta(x-a)-\delta(x)\Big\}. \tag{9.12}$$

ただし定義8，すなわち(8.3)が使ってある．

例 8　$f(x)=1$，$F(z)=1(z)$

このばあい(9.3)は

$$\phi(x)\circ 1 \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\phi(z)1(z)\} \tag{9.13}$$

となる．$\phi(x)$が1価解析関数であるのに対して，$\phi(x)\circ 1$は超関数である．つまり，超関数$1=\text{H.F.}1(z)$と$\phi(x)$の形式積だからである．§6で'1価解析関数を見直した超関数'と称したものが実はこの$\phi(x)\circ 1$である．ただし，簡単のために1を省略して単に$\phi(x)$と書き表わしたのである．実際，(9.7)の関係をn回くり返し使えば

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\phi(x)\circ 1\} = \phi^{(n)}(x)\circ 1 \tag{9.14}$$

が得られる．これは，微分に関しては超関数$\phi(x)\circ 1$を関数$\phi(x)$と同一視してもよいことを示すものである．

§10.　$H(z)$，$1(z)$，sgn z

超関数としてのHeaviside関数$H(x)$およびDiracのデルタ関数$\delta(x)$については読者もすでによくご存じのことであるが，これらから導かれる一群の超関数についてすこし立ち入った議論をしておこう．

いま，対数関数Log zを母関数とする超関数を考えよう．ただし，Log zは**対数関数の主値**，すなわち$-\pi<\arg z<\pi$の条件によって$\log z$を1価にしたものを表わす．したがって，x軸に沿っては

$$\text{Log}\, z = \log|x| \pm \pi i H(-x) \tag{10.1}$$

である．ここに$H(x)$はふつうのHeaviside関数であって，$H(-x)=1\,(x<0)$，$0\,(x>0)$である．また±は，上号はx軸に上側から近づくばあい，下号は下側から近づくばあいを表わす．$z\to -z$と入れかえると，x軸の上側と下側が入れかわり，かつ$x\to -x$となるから，(10.1)は

$$\text{Log}(-z) = \log|x| \mp \pi i H(x) \tag{10.2}$$

となる．したがって，

$$\text{O.F.}\{\text{H.F.}F(z)\} = \lim_{\varepsilon\to+0}\{F_+(x+i\varepsilon)-F_-(x-i\varepsilon)\} \tag{10.3}$$

の関係を思い出すと

$$\text{O.F.}\{\text{H.F.}\,\text{Log}\,(-z)\} = -2\pi i H(x),$$

すなわち

$$H(x) = \mathrm{O.F.}\left[\mathrm{H.F.}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z)\right\}\right] \tag{10.4}$$

が得られる．この結果は前に (2.4.8) として与えたものの O.F. をとったことに相当する．そこで，いま

$$H(z) \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-z), \quad j=2\pi i \tag{10.5}$$

で定義される解析関数 $H(z)$ を考えると，これは超関数 $H(x)$ の母関数の 1 つである．さらに

$$\mathbf{1}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} H(z)-H(-z), \tag{10.6}$$

$$\mathrm{sgn}\, z \overset{\mathrm{def}}{=} H(z)+H(-z) \tag{10.7}$$

で定義される解析関数 $\mathbf{1}(z)$, sgn z を導入しよう．これらを母関数とする超関数はどのようなものであろうか？

定義 1 により H.F. $F(z)=f(x)$ のとき H.F. $F(-z)=-f(-x)$ であることを思い出すと，

$$\mathrm{H.F.}H(z) = H(x), \tag{10.8}$$

$$\mathrm{H.F.}\, H(-z) = -H(-x), \tag{10.9}$$

$$\mathrm{H.F.}\mathbf{1}(z) = H(x)+H(-x) = 1, \tag{10.10}$$

$$\mathrm{H.F.sgn}\, z = H(x)-H(-x) = \mathrm{sgn}\, x \tag{10.11}$$

などの関係が得られる．すなわち，解析関数 $H(z)$, $\mathbf{1}(z)$, sgn z はそれぞれふつうの関数 $H(x)$, 1, sgn x を見直した超関数に対する母関数である．（これらの超関数は，定義 2.11 により，既知と考えられる．）

なお，後の便宜上，

$$\delta(z) \overset{\mathrm{def}}{=} H'(z) = -\frac{1}{j}\frac{1}{z} \tag{10.12}$$

で定義される解析関数 $\delta(z)$ を導入すると，

$$\mathrm{H.F.}\delta(z) = \delta(x) \tag{10.13}$$

である．容易にわかるように

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sgn}\, z = H'(z)-H'(-z) = 2\delta(z) \tag{10.14}$$

の関係が成り立つ．(10.14) の H.F. をとると

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}\, x = 2\delta(x) \tag{10.15}$$

が得られる．

注意　H, sgn, δ などの関数記号を超関数と母関数の両方に用いているけれども，引数が z のばあいは解析関数，引数が x のばあいは超関数を表わすことに注意しなければならない．たとえば $H(x)$, $\mathrm{sgn}\, x$, $\delta(x)$ は，解析関数 $H(z)$, $\mathrm{sgn}\, z$, $\delta(z)$ の引数 z に x を代入したものでは**ない**．

容易に確かめられるように，任意の複素数 z に対して

$$\mathrm{Log}(-z) = \mathrm{Log}\, z \mp \pi i, \quad \mathrm{Im}\, z \gtrless 0 \tag{10.16}$$

の関係が成り立つ．したがって

$$\mathbf{1}(z) = H(z) - H(-z) = -\frac{1}{j}\{\mathrm{Log}(-z) - \mathrm{Log}\, z\}$$

$$= \pm\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z \gtrless 0$$

である．これは前に導入した $\mathbf{1}(z)$ の定義式 (2.3.3) と一致する．

例 9　$a \gtrless 0$ に応じて，つぎの関係が成り立つ．

$$H(ax) = H(\pm x), \tag{10.17}$$

$$\mathrm{sgn}\, ax = \pm\, \mathrm{sgn}\, x, \tag{10.18}$$

$$\delta^{(n)}(ax) = \pm\frac{1}{a^{n+1}}\delta^{(n)}(x), \quad n=0,1,2,\cdots \tag{10.19}$$

(8.3), (10.5) により

$$\begin{aligned} H(ax) &= \mathrm{sgn}\, a\ \mathrm{H.F.}\, H(az) \\ &= \mathrm{sgn}\, a\ \mathrm{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-az)\right\} \\ &= \pm \mathrm{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(\mp|a|z)\right\} \\ &= \pm \mathrm{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(\mp z) - \frac{1}{j}\log|a|\right\} \\ &= \pm \mathrm{H.F.}\, H(\pm z) = H(\pm x). \end{aligned}$$

ただし，複号は $a \gtrless 0$ に対応する．これで (10.17) が証明された．つぎに

$$\mathrm{sgn}\, ax = H(ax) - H(-ax) \qquad \because\ (8.3),\ (10.7)$$

に (10.17) を適用すれば (10.18) が得られる．

最後に，(10.17) を x に関して $n+1$ 回微分すれば (10.19) が得られる．あるいは，

$$\delta^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{z}\right) = -\frac{(-1)^n n!}{jz^{n+1}}$$

を使ってもよい．

§11.　x^{-m}, $x^{-m}H(x)$, $x^{-m}\,\mathrm{sgn}\, x$

$H(x)$, $\mathrm{sgn}\, x$ は**ふつうの関数**であるが，これらはそれぞれ $H(z)$, $\mathrm{sgn}\, z$ を母関数とする**超関数**と見直されることはすでに述べたとおりである．超関数とし

ての $H(x)$, sgn x は何回でも微分できて，それらは $\delta(x)$ およびその導超関数で表わされることも明らかである．n を正の整数とすれば，$x^nH(x)$, $x^n\operatorname{sgn} x$ は超関数と解析関数 x^n の積としてその意味は明らかである．n が負の整数のばあいはどうであろうか？

x^{-m}（m は正の整数）は $x=0$ で正則ではないから，$x^{-m}H(x)$, $x^{-m}\operatorname{sgn} x$ を単純に $H(x)$, sgn x と x^{-m} の積と考えるわけにはいかない．しかし，定義 9 で導入した**形式積**の概念を使うと，これらを超関数として明確に定義することができる．

〔定義 10〕

$$x^{-m} \overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ 1 = \text{H.F.}\{z^{-m}\mathbf{1}(z)\}, \tag{11.1}$$

$$x^{-m}H(x) \overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ H(x) = \text{H.F.}\{z^{-m}H(z)\}, \tag{11.2}$$

$$x^{-m}\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ \operatorname{sgn} x = \text{H.F.}(z^{-m}\operatorname{sgn} z). \tag{11.3}$$

x^{-m} は，実はすでに定義 6 で定義されている．すなわち (6.4) 式で $\phi(z)=z^{-m}$ とおいたものである．$x^{-m}H(x)$, $x^{-m}\operatorname{sgn} x$ はそれぞれ 1 つのまとまった超関数と考えるので形式積の記号 ∘ はつけない．記法の便宜上これらを $H(x)/x^m$, $\operatorname{sgn} x/x^m$ のように書くこともある．

なお，上の定義から容易にわかるように

$$x^{-m} = x^{-m}H(x)+x^{-m}H(-x), \tag{11.4}$$

$$x^{-m}\operatorname{sgn} x = x^{-m}H(x)-x^{-m}H(-x) \tag{11.5}$$

の関係がある．(証明は読者にまかせる．)

[定理 14]　n, m を正の整数とすれば

$$x^n\cdot x^{-m} = x^{n-m},\quad x^n\cdot x^{-m}H(x) = x^{n-m}H(x),$$
$$x^n\cdot x^{-m}\operatorname{sgn} x = x^{n-m}\operatorname{sgn} x \tag{11.6}$$

が成り立つ．

(証明)　定義から容易に導ける．読者にまかせる．∎

[定理 15]　m を 0 または正の整数，n を任意の整数とすれば

$$x^n\circ\delta^{(m)}(x) = \begin{cases} 0, & n>m \\ (-1)^n\dfrac{m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x), & n\leqq m \end{cases} \tag{11.7}$$

が成り立つ．ただし，$n\geqq 0$ のばあいには，上式の左辺はふつうの積である．

(証明)　(10.12) を m 回微分すれば

$$\delta^{(m)}(z)=-\frac{(-1)^m m!}{j}\frac{1}{z^{m+1}}, \qquad (11.8)$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{j}\frac{1}{z^{m+1}}=\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{(m)}(z). \qquad (11.9)$$

さて

$$\begin{aligned} x^n\circ\delta^{(m)}(x) &= \text{H.F.}\{z^n\delta^{(m)}(z)\} \\ &= \text{H.F.}\left\{-\frac{(-1)^m m!}{j}\frac{1}{z^{m-n+1}}\right\} \quad \because\ (11.8) \\ &= \text{H.F.}\left\{(-1)^m m!\frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(z)\right\} \quad \because\ (11.9) \\ &= (-1)^n\frac{m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x). \end{aligned}$$

$n>m$ のばあいには，上式の第2行の $\{\cdots\}$ の中は x 軸上で正則であるから H.F.$\{\cdots\}=0$ となる．▮

[定理 16]　m を正の整数とすれば

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{x}=\frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}, \qquad (11.10)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{H(x)}{x}=(-1)^m m!\frac{H(x)}{x^{m+1}}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\delta^{(m)}(x), \qquad (11.11)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{\operatorname{sgn} x}{x}=(-1)^m m!\frac{\operatorname{sgn} x}{x^{m+1}}-2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\delta^{(m)}(x) \qquad (11.12)$$

が成り立つ．

（証明）　定理11により，$1/x$ はふつうの関数と同じように微分できるから，(11.10) はただちに得られる．

定理13により，形式積の微分はふつうの積の微分と同様に行なえるから，

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}\frac{H(x)}{x} &= \frac{d^m}{dx^m}\left\{\frac{1}{x}\circ H(x)\right\} \\ &= \left(\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{x}\right)\circ H(x)+\sum_{p=1}^{m}\frac{m!}{p!(m-p)!}\left(\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}\frac{1}{x}\right)\circ\frac{d^p}{dx^p}H(x) \\ &= \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}\circ H(x)+\sum_{p=1}^{m}\frac{m!}{p!(m-p)!}\frac{(-1)^{m-p}(m-p)!}{x^{m-p+1}}\circ\delta^{(p-1)}(x) \\ &= \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}H(x)-\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\delta^{(m)}(x). \end{aligned}$$

ただし，(11.7) の関係を使う．これは (11.11) にほかならない．(11.11) で x を $-x$ におきかえ，これを (11.11) から引くと，ただちに (11.12) が得られる．▮

§12. log|x|, log|x|H(x), log|x|sgn x

これらのふつうの関数は有限の区間で絶対積分可能であるから，定義2.11によって超関数と見直すことができる．その母関数は，つぎのようにすれば簡単に求められる．(10.5)と(10.2)によれば，x軸上では

$$H(z) = -\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-z) = -\frac{1}{j}\left[\log|x| \mp \frac{j}{2}H(x)\right] \qquad (12.1)$$

が成り立つ．したがって

$$[H(z)]^2 = \frac{1}{j^2}\left[(\log|x|)^2 \mp j\log|x|H(x) + \frac{j^2}{4}H(x)\right]. \qquad (12.2)$$

ただし $[H(x)]^2=H(x)$ の関係が使ってある．(12.2) の H.F. をとり，さらに O.F. をとると

$$\mathrm{O.F.}\{\mathrm{H.F.}[H(z)]^2\} = -\frac{2}{j}\log|x|H(x).$$

したがって

$$\log|x|H(x) = \mathrm{H.F.}\left[-\frac{j}{2}\{H(z)\}^2\right] \qquad (12.3)$$

で定義される超関数は確かにふつうの関数 $\log|x|H(x)$ を見直したものである．$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ のとき $f(-x)=-\mathrm{H.F.}\,F(-z)$ であることに注意すると，(12.3) からただちに

$$\log|x|H(-x) = \mathrm{H.F.}\left[\frac{j}{2}\{H(-z)\}^2\right] \qquad (12.4)$$

が得られる．そこで(12.3)と(12.4)の和および差をとれば

$$\log|x| = \mathrm{H.F.}\left[-\frac{j}{2}\{[H(z)]^2 - [H(-z)]^2\}\right], \qquad (12.5)$$

$$\log|x|\,\mathrm{sgn}\,x = \mathrm{H.F.}\left[-\frac{j}{2}\{[H(z)]^2 + [H(-z)]^2\}\right] \qquad (12.6)$$

が得られるのである．

[定理 17] つぎの微分公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}, \qquad (12.7)$$

$$\frac{d}{dx}\{\log|x|\,\mathrm{sgn}\,x\} = \frac{1}{x}\mathrm{sgn}\,x, \qquad (12.8)$$

$$\frac{d}{dx}\{\log|x|H(x)\} = \frac{1}{x}H(x), \qquad (12.9)$$

$$\frac{d}{dx}\{\log|x|H(-x)\} = \frac{1}{x}H(-x). \tag{12.10}$$

(証明) まず(12.9)を証明する.(12.3)から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{\log|x|H(x)\} &= \text{H.F.}\left\{-\frac{j}{2}\frac{d}{dz}[H(z)]^2\right\}\\ &= \text{H.F.}\{-jH(z)H'(z)\}\\ &= \text{H.F.}\left\{\frac{H(z)}{z}\right\}\\ &= \frac{1}{x}H(x).\end{aligned}$$

ただし,(10.12)と(11.2)が使ってある. この結果は(12.9)にほかならない. ここでxを$-x$におきかえると(12.10)が得られる.(12.9)と(12.10)の和と差をつくれば,(11.4)と(11.5)により,(12.7),(12.8)が得られる. ▮

例 10 nを正の整数とすれば,つぎの微分公式が成り立つ.

$$\frac{d}{dx}\{x^n\log|x|\} = nx^{n-1}\log|x| + x^{n-1}, \tag{12.11}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\log|x|\operatorname{sgn} x\} = nx^{n-1}\log|x|\operatorname{sgn} x + x^{n-1}\operatorname{sgn} x, \tag{12.12}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\log|x|H(x)\} = nx^{n-1}\log|x|H(x) + x^{n-1}H(x), \tag{12.13}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\log|x|H(-x)\} = nx^{n-1}\log|x|H(-x) + x^{n-1}H(-x). \tag{12.14}$$

これらを証明するには,超関数と解析関数の積の微分の公式と定理17の公式を使えばよい.

§13. $x^{-m}\log|x|$, $x^{-m}\log|x|H(x)$, $x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn} x$

上の例10に現われている$x^n\log|x|$, $x^n\log|x|\operatorname{sgn} x, \cdots$ は超関数 $\log|x|$, $\log|x|\operatorname{sgn} x, \cdots$ と解析関数x^nとの積である. ところが,nを負の整数$-m$でおきかえたものは積としては意味をもたないので,新しく定義を与えておく必要がある. それには**形式積**を使うのが便利である. 解析関数との積や微分演算などの演算がふつうの積と同様の方法で行なえるからである. そこで,つぎの定義を採用する.

〔**定義 11**〕

$$\begin{aligned}x^{-m}\log|x| &\overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ\log|x|\\ &= \text{H.F.}\left\{-\frac{j}{2}\frac{[H(z)]^2 - [H(-z)]^2}{z^m}\right\},\end{aligned} \tag{13.1}$$

$$x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ\log|x|\operatorname{sgn} x$$
$$= \text{H.F.}\left\{-\frac{j}{2}\frac{[H(z)]^2+[H(-z)]^2}{z^m}\right\}, \tag{13.2}$$

$$x^{-m}\log|x|H(x) \overset{\text{def}}{=} x^{-m}\circ\log|x|H(x)$$
$$= \text{H.F.}\left\{-\frac{j}{2}\frac{[H(z)]^2}{z^m}\right\}. \tag{13.3}$$

この定義によれば

$$x^{-m}\log|x| = x^{-m}\log|x|H(x) + x^{-m}\log|x|H(-x), \tag{13.4}$$
$$x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn} x = x^{-m}\log|x|H(x) - x^{-m}\log|x|H(-x) \tag{13.5}$$

が成り立つ．たとえば $x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn} x$ は一見 3 つの超関数 x^{-m}, $\log|x|$, $\operatorname{sgn} x$ の積のようであるが，もちろんそうではなくて，ひとかたまりになって 1 つの超関数を表わすのである．したがって，(13.5) の右辺を変形して

$$\text{右辺} = x^{-m}\log|x|\{H(x)-H(-x)\}$$
$$= x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn} x$$
$$= \text{左辺},$$

ゆえに (13.5) の等式が証明された——と考えるのは間違いである！

[定理 18]　例 10 の微分公式 (12.11)～(12.14) は n が負の整数 $-m$ のばあいにも成り立つ．

(証明)　超関数と 1 価解析関数の形式積の微分に関する公式 (9.7) で $\phi(x)=x^{-m}$ とし，$f(x)$ として $\log|x|$, $\log|x|\operatorname{sgn} x, \cdots$ をとり，定理 17 の諸公式を使えばよい．▮

§ 14.　$x^{-m}(\log|x|)^n$, $x^{-m}(\log|x|)^n H(x)$, $x^{-m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$

m, n が正の整数のばあい，標記のような超関数は上に述べたのと同様の方法で導入することができる．たとえば，(12.2) に対応して

$$[H(z)]^3 = -\frac{1}{j^3}\left[(\log|x|)^3 \mp \frac{3}{2}j(\log|x|)^2 H(x) + \frac{3}{4}j^2\log|x|H(x) \mp \frac{1}{8}j^3 H(x)\right] \tag{14.1}$$

が成り立つ．これから

$$(\log|x|)^2 H(x) = \text{H.F.}\left[\frac{j^2}{3}\left\{[H(z)]^3 - \frac{1}{4}H(z)\right\}\right] \tag{14.2}$$

が得られる．これを出発点として $(\log|x|)^2$, $(\log|x|)^2\operatorname{sgn} x$ をつくり，さらに x^{-m} との形式積によって $x^{-m}(\log|x|)^2$, $x^{-m}(\log|x|)^2\operatorname{sgn} x, \cdots$ を定義すればよいのである．ここでは，これ以上深入りすることはやめる．

§15. $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha \operatorname{sgn} x$

これまで x の整数ベキ，すなわち x^n, x^{-m} に関連する超関数について議論して来た．その母関数は1価解析関数 z^n, z^{-m} と対数関数 $\operatorname{Log} z$ の積で表わされるようなものであった．α が整数でないばあいに $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha H(x), \cdots$ を考えようとすると，当然その母関数は z^α に関係があるだろうと想像される．z^α は多価関数であるから，母関数として使うためには，これを1価にする必要がある．それには，z 平面で x 軸の負の部分に切目を入れて $-\pi<\arg z<\pi$ という制限をつける．すなわち

$$z^\alpha=\exp(\alpha \operatorname{Log} z)=e^{\alpha \operatorname{Log} z} \tag{15.1}$$

ときめておく．$\operatorname{Log} z$ はもちろん対数関数の主値である．x 軸上では

$$\operatorname{Log} z=\log|x|\pm\pi i H(-x) \tag{15.2}$$

であるから，

$$z^\alpha=\begin{cases}|x|^\alpha, & x>0\\ e^{\pm i\pi\alpha}|x|^\alpha, & x<0\end{cases} \tag{15.3}$$

である．したがって，上成分と下成分の差をとれば，

$$\begin{aligned}\text{O.F.}\{\text{H.F.}\, z^\alpha\}&=(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})|x|^\alpha H(-x)\\&=2i\sin\pi\alpha|x|^\alpha H(-x)\end{aligned}$$

が得られる．これから，

$$|x|^\alpha H(x)=\text{H.F.}\left\{\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},$$

$$|x|^\alpha H(-x)=\text{H.F.}\left\{\frac{-iz^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\}$$

の第2式が得られる．ただし，第1式は第2式で $x\to -x$ のおきかえを行なったものである．さらに，これらの2つの式の和と差をとれば $|x|^\alpha$ および $|x|^\alpha\operatorname{sgn} x$ が得られる．これを定義としてまとめておこう．

〔定義 12〕 α を非整数とする．このとき

$$|x|^\alpha H(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\left\{\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\}, \tag{15.4}$$

$$|x|^\alpha H(-x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\left\{\frac{-iz^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\}, \tag{15.5}$$

$$
\begin{aligned}
|x|^\alpha &\overset{\text{def}}{=} |x|^\alpha H(x) + |x|^\alpha H(-x) \\
&= \text{H.F.}\left\{\frac{-i}{2\sin\pi\alpha}[z^\alpha - (-z)^\alpha]\right\},
\end{aligned}
\tag{15.6}
$$

$$
\begin{aligned}
|x|^\alpha \operatorname{sgn} x &\overset{\text{def}}{=} |x|^\alpha H(x) - |x|^\alpha H(-x) \\
&= \text{H.F.}\left\{\frac{i}{2\sin\pi\alpha}[z^\alpha + (-z)^\alpha]\right\}
\end{aligned}
\tag{15.7}
$$

である．

[定理 19] nを正の整数とすれば

$$
x^n \cdot |x|^\alpha H(x) = |x|^{\alpha+n} H(x),
$$

$$
x^n \cdot |x|^\alpha H(-x) = (-1)^n |x|^{\alpha+n} H(-x),
$$

$$
x^n \cdot |x|^\alpha = \begin{cases} |x|^{\alpha+n}, & n=\text{偶数} \\ |x|^{\alpha+n}\operatorname{sgn} x, & n=\text{奇数} \end{cases}
$$

$$
x^n \cdot |x|^\alpha \operatorname{sgn} x = \begin{cases} |x|^{\alpha+n}\operatorname{sgn} x, & n=\text{偶数} \\ |x|^{\alpha+n}, & n=\text{奇数} \end{cases}
$$

（証明） 読者にまかせる．これらの等式は一見自明のようであるが，やはり定義 12 にもとづいて証明をする必要がある． ▮

[定理 20] つぎの微分公式が成り立つ．

$$
\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha H(x)\} = \alpha |x|^{\alpha-1} H(x), \tag{15.8}
$$

$$
\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha H(-x)\} = -\alpha |x|^{\alpha-1} H(-x), \tag{15.9}
$$

$$
\frac{d}{dx}|x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x, \tag{15.10}
$$

$$
\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha \operatorname{sgn} x\} = \alpha |x|^{\alpha-1}. \tag{15.11}
$$

（証明） まず (15.8) を証明する．(15.4) により

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha H(x)\} &= \text{H.F.}\left\{\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\frac{d}{dz}(-z)^\alpha\right\} \\
&= \text{H.F.}\left\{\frac{-i\alpha(-z)^{\alpha-1}}{2\sin\pi\alpha}\right\} \\
&= \text{H.F.}\left\{\frac{\alpha i(-z)^{\alpha-1}}{2\sin\pi(\alpha-1)}\right\} \\
&= \alpha |x|^{\alpha-1} H(x).
\end{aligned}
$$

同様にして (15.9) も証明できる．つぎに，(15.8) と (15.9) の和と差をつくれば，(15.6)，(15.7) の定義式を使って，(15.10)，(15.11) が得られる．▮

定義 12 の母関数の形から明らかなように，α は一般に**複素数**であってもよい．α が整数のばあいには，分母の $\sin\pi\alpha$ が 0 になるために定義式は意味を失うのである．α が負の整数 $-m$ のばあいについては，定義 10 として別の定義式が与えられているが，それと定義 12 の関係はどうなのであろうか．定義 12 の特別のばあいとして定義 10 が導かれるのではないのだろうか？　これについては次章で述べることにする．

§16.　方程式 $\varphi(x)\cdot f(x)=h(x)$

解析関数 $\varphi(x)$ と超関数 $h(x)$ が与えられたとき

$$\varphi(x)\cdot f(x) = h(x) \tag{16.1}$$

を満足する超関数 $f(x)$ を求めるという問題を考えてみよう．$\varphi(z)$ が x 軸上に零点をもたなければ，もちろん解は

$$f(x) = \frac{h(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{1}{\varphi(x)}\cdot h(x) \tag{16.2}$$

で与えられる．$1/\varphi(x)$ は解析関数であるから，それと超関数 $h(x)$ の積として右辺はたしかに超関数を表わし，したがって $f(x)$ は (16.1) を満足する超関数なのである．

$\varphi(z)$ が x 軸上に零点 $z=a_p(p=1,2,\cdots,N)$ をもつばあいには，

$$\varphi(z) = P(z)\varphi_1(z), \tag{16.3}$$

$$P(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots(z-a_N)^{m_N} \tag{16.4}$$

とおき，$\varphi_1(z)$ が x 軸上に零点をもたないようにすることができる．そこで (16.1) の両辺に解析関数 $1/\varphi_1(x)$ を掛けると

$$P(x)\cdot f(x) = h_1(x) \equiv [\varphi_1(x)]^{-1}\cdot h(x)$$

となる．これは (16.1) と同じ形の方程式で，$\varphi(x)$ が (16.4) という特別の形をもつばあいに相当する．けっきょく，このばあいを議論しておけば，一般の方程式 (16.1) のとり扱いができることになる．

さて，つぎの定理が成り立つ．

[定理 21]　任意の超関数 $h(x)$ に対して

$$P(x)\cdot f(x) = h(x),\quad P(x) = \prod_{p=1}^{N}(x-a_p)^{m_p} \tag{16.5}$$

を満足する超関数 $f(x)$ は

$$f(x)=[P(x)]^{-1}\circ h(x)+\sum_{p=1}^{N}\delta_{m_p-1}(x-a_p) \tag{16.6}$$

で与えられる．ただし，$\circ$ 印は形式積を表わし，$\delta_n(x)$ は $\delta(x), \delta'(x), \cdots, \delta^{(n)}(x)$ の任意の線形結合を意味するものとする．

（証明）　形式積の定義により

$$f_1(x)=[P(x)]^{-1}\circ h(x) \tag{16.7}$$

は明らかに (16.5) の 1 つの解(つまり**特解**)である．そこで

$$f(x)=f_1(x)+f_0(x) \tag{16.8}$$

とおくと，$f_0(x)$ は**同次方程式**：

$$P(x)\cdot f_0(x)=0 \tag{16.9}$$

を満足する．$f_0(x)=\text{H.F.}F_0(z)$ とすれば，(16.9) は

$$P(z)F_0(z)=\Phi(z) \tag{16.10}$$

を意味する．ただし，$\Phi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数である．さて，$[P(z)]^{-1}$ を部分分数に展開すれば，

$$[P(z)]^{-1}=\sum_{p=1}^{N}P_{m_p}\left(\frac{1}{z-a_p}\right) \tag{16.11}$$

の形になる．ただし，$P_n(z)$ は n 次の多項式を表わす．したがって，(16.10) は

$$F_0(z)=\sum_{p=1}^{N}P_{m_p}\left(\frac{1}{z-a_p}\right)\Phi(z) \tag{16.12}$$

と書ける．$\Phi(z)$ を $z-a_p$ のベキ級数に展開すると

$$P_{m_p}\left(\frac{1}{z-a_p}\right)\Phi(z)\cong P_{m_p}\left(\frac{1}{z-a_p}\right)=\delta_{m_p-1}(z-a_p) \tag{16.13}$$

が得られる．ただし，左辺の P_{m_p} の各項の係数が，与えられた $P(z)$ によって決定しているのに対して，中辺の P_{m_p} の係数は，$\Phi(z)$ が任意であるため，まったく任意であることに注意しなければならない．また，中辺から右辺に移るには，$\delta(z)=-(jz)^{-1}$ の関係を用いる．(16.12)，(16.13) から

$$f_0(x)=\text{H.F.}\ F_0(z)=\sum_{p=1}^{N}\delta_{m_p-1}(x-a_p) \tag{16.14}$$

が得られる．つまり，これが同次方程式の一般解である．(16.14) と (16.7) とを (16.8) に代入すれば，(16.6) が得られるのである．∎

この定理の示すように，超関数のばあいには，(16.1) のような方程式の解に

δ関数(およびその逐次導関数)だけの任意性が伴なうことを注意すべきである.

例 11　$x^n f(x)=0$, $(x^2-a^2)f(x)=1$, $(x-a)f(x)=\delta(x)$ の解は, それぞれ

$$f(x) = c_0\delta(x)+c_1\delta'(x)+\cdots+c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}+c_1\delta(x-a)+c_2\delta(x+a),$$

$$f(x) = \begin{cases} -a^{-1}\delta(x)+c\delta(x-a), & a\neq 0 \\ -\delta'(x)+c\delta(x), & a=0 \end{cases}$$

である.

§17. ま　と　め

ある1つの超関数$f(x)$が与えられたばあい, これに対して$f(-x)$, $\overline{f(x)}$に相当する超関数をつくることを考え, 超関数について**偶奇性**, **虚実性**の概念を定義した. また, $f(ax+b)$ に相当する超関数がつくられることを知った. また, 任意の1価解析関数 $\phi(z)$ と任意の $f(x)$ から $\phi(x)f(x)$ の形の超関数を構成する方法を考え, $f(x)$ と $\phi(x)$ の**形式積**という新しい概念を導入した. そして, この概念を使って $x^{-m}(\log|x|)^n$, $x^{-m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$, $x^{-m}(\log|x|)^n H(x)$ などの超関数を定義した. ただし, m, n は正の整数である. (m が負, すなわち $-m$ が正の整数のばあいは特に考える必要はない. たとえば $x^{-m}(\log|x|)^n$ は単に x^{-m} と $(\log|x|)^n$ の積と考えればよいからである.) 前章で述べた‘見直し’の操作は, “任意の有限区間で絶対積分可能”の関数だけに適用されるものであった. (もっとも, その方法で見直された超関数を何回も微分することによって, 上述の条件を満たさないふつうの関数に対応する超関数を得ることはできる.) 形式積を使う‘見直し’の操作では, 上述のような制限はつかないのである. つぎに, 非整数の任意の複素数 α について, $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha \operatorname{sgn} x$, $|x|^\alpha H(x)$ などの超関数を導入した. これらに $(\log|x|)^n$ が掛かった形の超関数については次章で述べる. 最後に, 形式積の1つの応用として, $\varphi(x)\cdot f(x) = h(x)$ の形の方程式をとり扱った.

4 パラメーターを含む超関数

§1. はじめに

前の章では，超関数の具体例として x^{-m}, $x^{-m}H(x)$, $x^{-m}\operatorname{sgn} x$ およびこれらに $(\log|x|)^n$ が掛かった形の超関数について説明した．ただし，m, n は正の整数である．その際，形式積の概念，すなわち超関数 $f(x)$ と 1 価解析関数 $\phi(x)$ の積の形の超関数 $\phi(x)f(x)$ を考えるということが基本的な役割を演じた．さらに，任意の複素数 α に対して $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha \operatorname{sgn} x$ などの超関数も定義された．ただし，α は整数でないという仮定がなされていた．これらの超関数と上記の x^{-m}, $x^{-m}H(x)$, $\cdots$ などの超関数とはどんな関係にあるのだろうか？これを調べるためには，パラメーター α を含む超関数 $f(x,\alpha)$ について議論する必要がある．これが本章の主題である．なお，超関数 $|x|^\alpha H(x)$ の応用例として，発散積分に関する Hadamard の有限部分が自然に導入されることを示す．

§2. パラメーターを含む超関数

パラメーター α を含む母関数 $F(z,\alpha)$ からつくられる超関数 $f(x,\alpha)=$ H.F.$F(z,\alpha)$ はもちろんそのパラメーター α に依存する．α は連続的な変数であってもよいし，$\alpha=1,2,3\cdots$ のようにとびとびの値をとってもよい．(このばあいには，$f(x,\alpha)$, $F(z,\alpha)$ をそれぞれ $f_n(x)$, $F_n(z)$ と書き表わす方が見やすいだろう.) α がある値 α_0 に近づくときの $f(x,\alpha)$ の極限値や，$f(x,\alpha)$ の α に関する微分や積分などをつぎのように定義しよう．

〔定義 1〕 $f(x,\alpha)=\text{H.F.}\,F(z,\alpha)$, $f_n(x)=\text{H.F.}\,F_n(z)$ とする．このとき

$$\lim_{\alpha} f(x,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\{\lim_{\alpha} F(z,\alpha)\}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\frac{\partial}{\partial\alpha} F(z,\alpha), \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\sum_{n=1}^{\infty} F_n(z), \tag{2.3}$$

$$\int f(x,\alpha)\,d\alpha \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\int F(z,\alpha)\,d\alpha \tag{2.4}$$

である．ただし，右辺の極限値，微分，積分が存在するものと仮定する．

要するに，$\lim_{\alpha}$，$\sum_{n=1}^{\infty}$，$\partial/\partial\alpha$，$\int d\alpha$ などの操作が H.F. と交換可能であるように定義されているのである．

上の定義のただし書き，すなわち右辺の母関数に関する極限値や微分，積分が存在するという前提条件はとくに重要である．左辺の $f(x,\alpha)$, $f_n(x)$ が**ふつうの関数**のばあいには，これらはそのまま**超関数**と見直すことができる．したがって，これらがふつうの関数として極限値や微分，積分をもつばあいには超関数としても当然その性質をもつものと期待されるだろう．（しかし，いきなりそうだと決めつけるわけにはいかない．厳密にいえば，やはり定義1にしたがって証明する必要がある．）しかし，逆に，ふつうの関数として極限値，微分，積分をもたないばあいでも，超関数としては極限値，微分，積分をもつこともあり得る．このことはとくに留意する必要がある．たとえば，$\lim_{\alpha\to\infty}\sin\alpha x$ はふつうの関数としては存在しないが，超関数としては0である（下の例1を見よ）．また $(\partial/\partial\alpha)|x|^{\alpha}(\alpha\leqq 0)$ は，ふつうの関数としては $x=0$ では存在しないが，超関数としては $|x|^{\alpha}\log|x|$ を与える（§4を見よ）．

なお，定義1として与えた (2.2) ～ (2.4) の3つの関係は，実は本質的には極限値についての (2.1) の関係式に含まれるものである．たとえば

$$g(x,h)\equiv[f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)]/h,$$
$$G(z,h)\equiv[F(z,\alpha+h)-F(z,\alpha)]/h$$

とおいてみると，$g(x,h)$ は h をパラメーターとする超関数であって，$g(x,h)=\text{H.F.}G(z,h)$ である．したがって，(2.1) を適用すれば

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)=\lim_{h\to0}g(x,h)=\text{H.F.}\lim_{h\to0}G(z,h)=\text{H.F.}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(z,\alpha)$$

となる．これは (2.2) にほかならない．

また

$$g_m(x)\equiv\sum_{n=1}^{m}f_n(x),\quad G_m(z)\equiv\sum_{n=1}^{m}F_n(z)$$

とおいてみると，$g_m(x)$ は m をパラメーターとする超関数で，$g_m(x)=\text{H.F.}G_m(z)$ である．したがって，(2.1) を適用すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=\lim_{m\to\infty}g_m(x)=\text{H.F.}\lim_{m\to\infty}G_m(z)=\text{H.F.}\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)$$

となる．これは (2.3) にほかならない．最後に，積分は，積分区間を無限個の微小区間に分割して総和をとるというように考えられるから，(2.4) は内容的には (2.3) と同等なのである．

例 1

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sin\alpha x=\lim_{\alpha\to\infty}\cos\alpha x=0. \tag{2.5}$$

まず $e^{i\alpha x}(\alpha>0)$ を考える．これは x 軸上で正則な解析関数である．したがって，その母関数は

$$\text{G.F. } e^{i\alpha x}=[e^{i\alpha z},0]\equiv F(z,\alpha)$$

のように表わすことができる．すなわち，母関数の上成分，下成分はそれぞれ $F_+(z,\alpha)=e^{i\alpha z}$，$F_-(z,\alpha)=0$ である．$z=x+iy$ とおくと

$$e^{i\alpha z}=e^{-\alpha y}\cdot e^{i\alpha x}$$

であるから，$\alpha\to+\infty$ に対して $F_+(z,\alpha)\to 0$ である．(上成分に対しては上半平面 $(y>0)$ だけを考えればよいからである．) また下成分 $F_-(z,\alpha)$ は恒等的に 0 である．けっきょく

$$\lim_{\alpha\to+\infty}e^{i\alpha x}=\text{H.F.}\lim_{\alpha\to+\infty}[e^{i\alpha z},0]=0 \tag{2.6}$$

が得られる．$\alpha<0$ のばあいには，母関数として G.F. $e^{i\alpha x}=-[0,e^{i\alpha z}]$ を考えればよい．その結果

$$\lim_{\alpha\to-\infty}e^{i\alpha x}=-\text{H.F.}\lim_{\alpha\to-\infty}[0,e^{i\alpha z}]=0 \tag{2.7}$$

が得られる．つまり，α の正負にかかわらず，$\alpha\to\infty$ に対して $e^{i\alpha x}\to 0$ である．したがってまた $e^{-i\alpha x}\to 0$ である．まとめて書くと

$$\lim_{\alpha\to\infty}e^{i\alpha x}=\lim_{\alpha\to\infty}e^{-i\alpha x}=0. \tag{2.8}$$

さて，$\sin\alpha x=(e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x})/2i$，$\cos\alpha x=(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})/2$ であるから，最初に挙げた結果が出る．

例 2

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha x}{\pi x}=\delta(x). \tag{2.9}$$

まず $\alpha>0$ のばあいを考える．

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha x}{\pi x}&=\frac{1}{2\pi ix}(e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x})\\&=\frac{1}{2\pi ix}\{(e^{i\alpha x}-1)-(e^{-i\alpha x}-1)\}\\&=\text{H.F.}\left[\frac{e^{i\alpha z}-1}{jz},\ \frac{e^{-i\alpha z}-1}{jz}\right],\quad j=2\pi i.\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで，母関数の上下両成分はともに $z=0$ で正則であることに注意！ $\alpha\to\infty$ とすれば，(2.6)，(2.7) によって

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha x}{\pi x}=\text{H.F.}\left[\frac{-1}{jz},\ \frac{-1}{jz}\right]=\text{H.F.}\delta(z)=\delta(x)$$

が得られる．ただし，$\delta(z)=-1/(jz)$ は $\delta(x)$ の母関数である．$\alpha<0$ のばあいは $\sin\alpha x=-\sin|\alpha|x$ であるから，上のばあいに帰着する．

例 3

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon|x|^{\varepsilon-1}=2\delta(x). \tag{2.11}$$

前に与えた $|x|^\alpha$ の定義式 (3.15.6)，すなわち

$$|x|^\alpha=\text{H.F.}\left\{\frac{-i}{2\sin\pi\alpha}[z^\alpha-(-z)^\alpha]\right\} \tag{2.12}$$

で $\alpha=\varepsilon-1$ とおくと

$$|x|^{\varepsilon-1}=\text{H.F.}\left\{\frac{i}{2\sin\pi\varepsilon}[z^{-1}\cdot z^\varepsilon+z^{-1}\cdot(-z)^\varepsilon]\right\}$$

$$=\text{H.F.}\left\{\frac{i}{2\sin\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{z}[z^\varepsilon+(-z)^\varepsilon]\right\}.$$

$\varepsilon\to 0$ のとき，$z^\varepsilon\to 1$，$(-z)^\varepsilon\to 1$，$\sin\pi\varepsilon/(\pi\varepsilon)\to 1$ であるから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon|x|^{\varepsilon-1}=\text{H.F.}\left(\frac{i}{\pi}\frac{1}{z}\right)=\text{H.F.}\{2\delta(z)\}=2\delta(x)$$

が得られる．すなわち (2.11) である．

例 4

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon}=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x),\quad \varepsilon\gtrless 0. \tag{2.13}$$

うっかりすると，極限値は $1/x$ であると思いやすい例である．まず，$\varepsilon>0$ のばあいを考える．左辺の超関数は

$$\frac{1}{x+i\varepsilon}=\text{H.F.}\left[\frac{1}{z+i\varepsilon},0\right],\quad \varepsilon>0 \tag{2.14}$$

のように表わされる．$(z+i\varepsilon)^{-1}$ は $\varepsilon\geqq 0$ のとき上半平面 ($\text{Im}\,z>0$) で正則であるから，$\varepsilon\to 0$ の極限をとることができる．すなわち

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon}=\text{H.F.}\left[\frac{1}{z},0\right]=\text{H.F.}\frac{1}{z}\mathbf{1}_+(z).$$

ところが，$\mathbf{1}_+(z)=\mathbf{1}(z)+1/2$ であるから

$$\frac{1}{z}\mathbf{1}_+(z)=\frac{1}{z}\mathbf{1}(z)+\frac{1}{2}\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\mathbf{1}(z)-\frac{j}{2}\delta(z). \tag{2.15}$$

ただし，$\delta(z)=-1/(jz)$ は δ 関数の母関数である．(2.15) の H.F. をとると，(2.13) の $\varepsilon>0$ のばあいが得られる．

$\varepsilon<0$ のばあいは，(2.14) で母関数として $(z+i\varepsilon)^{-1}\mathbf{1}_-(z)$ をとり，上と同様の計算を行なえばよい．

§3.　パラメーターを含む超関数の演算

上の定義1から明らかなように，パラメーターを含む超関数の諸性質は，パラメーターを含む解析関数の性質をそのまま反映している．ところが，解析関数はつぎの定理が示すように極めて良い性質をもつのである．

[定理 1] パラメーター α を含み，領域Dで正則な解析関数 $F(z,\alpha)$ を考える．$\alpha\to\alpha_0$ に対して $F(z,\alpha)$ は $F(z)$ に収束する，すなわち $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(z,\alpha)=F(z)$ が存在するものとする．またその収束はD内の任意の閉領域において一様であるとする．（これをDで**広義一様収束する**という．）このとき

（i） $F(z)$ は領域Dで正則である．

（ii） $$\lim_{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}F(z,\alpha)=\frac{dF}{dz}. \tag{3.1}$$

（iii） $$\lim_{\alpha}\int_{\mathrm{L}}F(z,\alpha)dz=\int_{\mathrm{L}}F(z)dz. \tag{3.2}$$

ここでLはD内にある任意の曲線分である．また $\alpha\to\alpha_0$ の極限操作は，α が連続的に変化するばあいでも，$\alpha=1,2,\cdots$ のようにとびとびの値をとるばあいでもよい．そして，α_0 は有限でも無限でもよい．なお，極限関数 $F(z)$ が領域Dで有界ならば，収束性は必然的に広義一様収束性となる．

以下の議論ではこの定理の内容だけが重要なので，ここでは証明は省略する．興味を抱かれる読者は適当な関数論の教科書を見ていただきたい．ただ一言説明を加えると，（ii），（iii）は極限操作 lim が微分演算 d/dz および積分演算 $\int_{\mathrm{L}}dz$ と交換可能であることを述べるものである．$F(z,\alpha)$ として $\sum_{n=1}^{\alpha}F_n(z)$ をとると，（ii），（iii）はそれぞれ，いわゆる**項別微分**と**項別積分**が可能であることを意味している．

$F(z,\alpha)$ が α について微分可能のばあいには，すでに§2に述べたように，$G(z,h)\equiv[F(z,\alpha+h)-F(z,\alpha)]/h$ とおいて h をパラメーターと考えると，

$$\lim_{h\to0}G(z,h)=\frac{\partial}{\partial\alpha}F(z,\alpha)$$

という極限値が存在することになる．そこで，上の定理の（ii）を適用すると（F,α のかわりに G,h と書く），

$$\lim_{h\to0}\frac{\partial}{\partial z}G(z,h)=\frac{\partial}{\partial z}\lim_{h\to0}G(z,h)$$

となる．ところが，$G(z,h)$ の定義式から容易にわかるように，左辺は $\partial/\partial\alpha\{\partial/\partial zF(z,\alpha)\}$ である．また右辺はもちろん $\partial/\partial z\{\partial/\partial\alpha F(z,\alpha)\}$ である．こうして，つぎの定理の（i）が得られる．（ii）についても同様である．

[定理 2] $F(z,\alpha)$ が α について微分可能ならば

（i） $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial z}F(z,\alpha)\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}F(z,\alpha)\right\}, \tag{3.3}$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{L}F(z,\alpha)dz=\int_{L}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(z,\alpha)dz \tag{3.4}$$

が成り立つ.

さて，定義1の母関数 $F(z,\alpha)$ に対して定理1を適用すると，ただちにつぎの定理が得られる.

[定理 3] パラメーター α を含む超関数 $f(x,\alpha)$ を考える. $f(x)=\lim_{\alpha}f(x,\alpha)$ が存在するならば

(i) $$\lim_{\alpha}\overline{f(x,\alpha)}=\overline{f(x)}, \tag{3.5}$$

(ii) $$\lim_{\alpha}f(ax+b,\alpha)=f(ax+b), \tag{3.6}$$

(iii) $$\lim_{\alpha}\varphi(x)f(x,\alpha)=\varphi(x)f(x), \tag{3.7}$$

(iv) $$\lim_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}f(x,\alpha)=f'(x), \tag{3.8}$$

(v) $$\lim_{\alpha}\int_{a}^{b}f(x,\alpha)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \tag{3.9}$$

が成り立つ. ただし，a, b は実数の定数，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数である. また $f(x)=\sum_{n}f_{n}(x)$ が存在するばあいについて，上の各式に対応する関係が成り立つ.

(証明) $f(x,\alpha)=\mathrm{H.F.}\,F(z,\alpha)$ とする. $f(x)=\lim_{\alpha}f(x,\alpha)$ が存在するというのは，定義1によれば，$F(z)=\lim_{\alpha}F(z,\alpha)$ が存在して，かつ $f(x)=\mathrm{H.F.}F(z)$ であるということである. ここでは代表的に (ii) を証明する.

定義3.8によると

$$f(ax+b,\alpha)=\mathrm{sgn}\,a\,\mathrm{H.F.}F(az+b,\alpha), \tag{3.10}$$

$$f(ax+b)=\mathrm{sgn}\,a\,\mathrm{H.F.}F(az+b) \tag{3.11}$$

である. したがって，定義1により

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha}f(ax+b,\alpha)&=\mathrm{H.F.}\lim_{\alpha}\{\mathrm{sgn}\,a\,F(az+b,\alpha)\}\\&=\mathrm{sgn}\,a\,\mathrm{H.F.}F(az+b)\\&=f(ax+b)\end{aligned}$$

が得られる. すなわち (ii) が証明された.

その他の証明も簡単である. 読者にまかせる. ∎

前に定義1の下で述べたように，パラメーター α に関する微分演算 $\partial/\partial\alpha$ は α についての極限操作 $\lim_{\alpha}$ の1つである. ただ微分演算が実際の応用で重要な

ので，内容的には定理3に含まれるものであるが，微分演算に関係することを定理4としてまとめておく．

[定理 4] パラメーター α を含む超関数 $f(x,\alpha)$ を考える．$(\partial/\partial\alpha)f(x,\alpha)$ が存在するならば

（i） $$\frac{\partial}{\partial\overline{\alpha}}\overline{f(x,\alpha)}=\overline{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)}, \tag{3.12}$$

（ii） $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\varphi(x)f(x,\alpha)\}=\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha), \tag{3.13}$$

（iii） $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{A(\alpha)f(x,\alpha)\}=A'(\alpha)f(x,\alpha)+A(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha), \tag{3.14}$$

（iv） $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(x,\alpha)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right\}, \tag{3.15}$$

（v） $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)dx \tag{3.16}$$

が成り立つ．ただし，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数，$A(\alpha)$ は α について微分可能な関数である．

上の（i），（ii）は自明のような結果である．また（iii）はパラメーターに関する微分をふつうの積の微分と同様に行なってもよいことを示している．なお，定理1～定理4のすべてについて注意すべきことがある．それは，定理として挙げられている等式の右辺は定理の前提から存在が保証されているのに対して，左辺はもともと存在するかどうかがわからないものであるということである．左辺が確かに**存在し**，かつ右辺に**等しい**というのが定理の意味である．

例 5 任意の実数 p に対して

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^p\sin\alpha x=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^p\cos\alpha x=0 \tag{3.17}$$

が成り立つ．

（証明） $p<0$ のばあいには (3.17) は明らかである ($\sin\alpha x$，$\cos\alpha x$ を**ふつうの関数**としても)．（しかし，下の定理5を見よ．）そこで，この等式を x に関して $2N$ 回微分し，定理3の（iv）を適用すると

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^{p+2N}\sin\alpha x=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^{p+2N}\cos\alpha x=0$$

が得られる．この $p+2N$ を p と書きかえると，けっきょく任意の正・負の実数 p に対して (3.17) が成り立つことになる．▮

この例で $p=0$ とした特別のばあいが，前にとり扱った例1である．この例についても例1と同様の方針で証明することができるが，すこしめんどうである．

例 6　$\delta(x)$ の表現

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2}=\delta(x), \tag{3.18}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sech}^2\alpha x=\delta(x), \tag{3.19}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}=\delta(x). \tag{3.20}$$

ただし $\alpha>0$ とする．

（証明）$f(x,\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\alpha x$ とすれば，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2},\qquad \lim_{\alpha\to\infty}f(x,\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x$$

である．これに定理3の（iv）を適用して $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sgn}x=2\delta(x)$ に注意すれば，(3.18) が得られる．

$$f(x,\alpha)=\frac{1}{2}\tanh\alpha x,\qquad (\alpha/\pi)^{1/2}\int_0^x e^{-\alpha x^2}dx$$

として同様の計算を行なえば，(3.19)，(3.20) が得られる．∎

前に例2，例3として $\delta(x)=\lim_{\alpha\to\infty}\{(\sin\alpha x)/\pi x\}$，$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\dfrac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$ などの表現が得られている．これらと上の3つの表現のおのおのについて，グラフをかいて各曲線が $\delta(x)$ にどのように近づいていくかを調べてみることをおすすめする．

§4.　関数列の収束と超関数列の収束

例5，例6のとり扱いでは，ふつうの関数列が収束するばあいにはそれに対応する超関数列は当然収束するものと考えていた．はたしてこれは許されることだろうか？

いま，(3.18) を x について微分して得られる関係：

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2\alpha x}{(1+\alpha^2x^2)^2}=-\pi\delta'(x),\qquad \alpha>0 \tag{4.1}$$

を考えてみよう．左辺をふつうの関数とすると，たしかに収束して0となる．($x\neq0$, $x=0$ の2つのばあいに分けて考えればよい.) これを見直せば超関数0となるはずであるが，右辺は $-\pi\delta'(x)$ である．すなわち，(4.1) の関係は，常識的な方法では導けないのである．それはなぜか？

定義を反省してみればすぐわかるように，超関数の列(族)の収束性は母関数の列(族)の収束性に直接関連するものであって，対応するふつうの関数列(族)の収束性とは間接的な関連しかないのである．しかし，つぎの定理によれば，

ある程度直接的な関連が保証される.

[定理 5] $f(x,\alpha), f(x)$ をふつうの関数とする. $f(x,\alpha)$ は x および α に関して一様に有界で, かつ有限個の点を除いて一様に $f(x)$ に収束するものとする. このとき, 超関数と見直した $f(x,\alpha)_{\mathrm{H.F.}}$, $f(x)_{\mathrm{H.F.}}$ について

$$\lim_{\alpha} f(x,\alpha)_{\mathrm{H.F.}} = f(x)_{\mathrm{H.F.}} \tag{4.2}$$

が成り立つ.

(証明) 仮定により, $f(x,\alpha), f(x)$ は任意の有限区間で絶対積分可能である. したがって, 定義2.11によって, 超関数と見直される. それらの母関数は, (2.4.6) により,

$$F(z,\alpha) = \frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t,\alpha)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z}, \tag{4.3}$$

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z} \tag{4.4}$$

で与えられる. したがって, (4.2) をいうためには, $\alpha\to\alpha_0$ のとき $F(z,\alpha)\to F(z)$ であることをいえばよい. まず

$$F(z,\alpha)-F(z) = \frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t,\alpha)-f(t)}{\varphi(t)}\frac{dt}{t-z} \tag{4.5}$$

である. $f(x,\alpha)\to f(x)$ の一様収束性の破れる点を $x=a_p(p=1,2,\cdots)$ とする. これらの点を含む幅 2δ の微小区間とその他の区域に積分の区域を分ける:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \sum_p \int_{a_p-\delta}^{a_p+\delta} + \int'.$$

一様収束性から, $\lim_{\alpha}\int' = 0$. また

$$\left|\int_{a_p-\delta}^{a_p+\delta}\right| \leqq \int_{a_p-\delta}^{a_p+\delta}\frac{|f(t,\alpha)-f(t)|}{|\varphi(t)|}\frac{dt}{|t-z|} = O(\delta)$$

であることが容易にわかる. (収束因子 $\varphi(z)$ が x 軸上に零点をもたないこと, $f(t,\alpha)$, $f(t)$ が一様有界であること, $|t-z|\geqq|\mathrm{Im}\,z|$ であることを使えばよい.)

δ は任意に小さく選ぶことができるから, けっきょく, $F(z,\alpha)\to F(z)$ が成り立つ. ∎

ここで, 例5と例6のとり扱いを振りかえって眺めてみると, 要するにふつうの関数列(族)の極限を計算していたことがわかる. つまり, 例5で得られた極限関数はふつうの関数としての0であり, 例6でのそれはふつうの関数とし

ての sgn x であった．しかし，上の定理によって，これらをそれぞれ超関数の 0 および sgn x と見直すことができたのである．

これに反して，上の (4.1) の例では $f(x,\alpha)=2\alpha x(1+\alpha^2x^2)^{-2}$ の一様有界性が成り立たない．すなわち，$x\neq 0$ として $\alpha\to\infty$ を考えると，$f(x,\alpha)\sim 2(\alpha x)^{-3}$ となり，$x=0$ の近くで一様有界性が破れるのである．つまり，定理 5 を利用することができないのである．

§5. $|x|^\alpha\log|x|$, $|x|^\alpha\log|x|H(x)$, $|x|^\alpha\log|x|\operatorname{sgn}x$

標記の諸関数は $\alpha>0$ のばあいは x のすべての値に対して**ふつうの関数**である．($x\to 0$ のときでも確定値 0 をもつからである.) さて，$\alpha<0$ のばあいを含めてこれらは**超関数**として疑義なく定義されることを以下に述べる．

前に，定義 3.12 として

$$|x|^\alpha H(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\left\{\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},\tag{5.1}$$

$$|x|^\alpha H(-x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\left\{\frac{-iz^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},\tag{5.2}$$

$$|x|^\alpha\overset{\text{def}}{=}|x|^\alpha H(x)+|x|^\alpha H(-x),\tag{5.3}$$

$$|x|^\alpha\operatorname{sgn}x\overset{\text{def}}{=}|x|^\alpha H(x)-|x|^\alpha H(-x)\tag{5.4}$$

を与えた．これらの超関数の母関数は，右辺の形から明らかなように，α に関して微分可能である．したがって，定義 1 により，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)=\text{H.F.}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},\tag{5.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(-x)=\text{H.F.}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{-iz^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},\tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)+\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(-x),\tag{5.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha\operatorname{sgn}x=\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)-\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(-x)\tag{5.8}$$

などの超関数が考えられる．ところが，左辺は $x\neq 0$ に対してはふつうの関数である．たとえば，$x>0$ では

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)=\frac{\partial}{\partial\alpha}x^\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{\alpha\log x}=\log x\,e^{\alpha\log x}=x^\alpha\log x.$$

また，$x<0$ では $H(x)=0$ であるから $(\partial/\partial\alpha)|x|^\alpha H(x)=0$．したがって，**ふつうの関数**として

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)=|x|^\alpha\log|x|H(x),\quad (x\neq 0)$$

の関係が成り立つ．ところが，この等式の左辺はすでに超関数として定義されているから，右辺の $|x|^\alpha\log|x|H(x)$ はその超関数を表わすものと見なすことができるだろう．こうして，つぎのような新しい超関数が導入される．

〔**定義 2**〕 α を非整数とする．このとき

$$|x|^\alpha\log|x|H(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x),\tag{5.9}$$

$$|x|^\alpha\log|x|H(-x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(-x),\tag{5.10}$$

$$|x|^\alpha\log|x|\overset{\text{def}}{=}|x|^\alpha\log|x|H(x)+|x|^\alpha\log|x|H(-x),\tag{5.11}$$

$$|x|^\alpha\log|x|\operatorname{sgn}x\overset{\text{def}}{=}|x|^\alpha\log|x|H(x)-|x|^\alpha\log|x|H(-x)\tag{5.12}$$

である．

[**定理 6**] n を正の整数とすれば

$$x^n\cdot|x|^\alpha\log|x|H(x)=|x|^{\alpha+n}\log|x|H(x),\tag{5.13}$$

$$x^n\cdot|x|^\alpha\log|x|H(-x)=|x|^{\alpha+n}\log|x|H(-x),\tag{5.14}$$

$$x^n\cdot|x|^\alpha\log|x|=\begin{cases}|x|^{\alpha+n}\log|x|, & n=\text{偶数}\\ |x|^{\alpha+n}\log|x|\operatorname{sgn}x, & n=\text{奇数}\end{cases}\tag{5.15}$$

$$x^n\cdot|x|^\alpha\log|x|\operatorname{sgn}x=\begin{cases}|x|^{\alpha+n}\log|x|\operatorname{sgn}x, & n=\text{偶数}\\ |x|^{\alpha+n}\log|x|, & n=\text{奇数}\end{cases}\tag{5.16}$$

が成り立つ．

（証明） (5.9) により

$$\begin{aligned}x^n\cdot|x|^\alpha\log|x|H(x)&=x^n\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^\alpha H(x)\\&=\frac{\partial}{\partial\alpha}x^n|x|^\alpha H(x)\qquad\because\ (3.13)\\&=\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^{\alpha+n}H(x)\qquad\because\ \text{定理 3.19}\\&=|x|^{\alpha+n}\log|x|H(x)\qquad\because\ (5.9)\end{aligned}$$

である．これで (5.13) が証明された．(5.14)～(5.16) についても同様に証明できる．∎

[定理 7] つぎの微分公式が成り立つ.

$$\frac{d}{dx}\{|x|^{\alpha}\log|x|H(x)\}$$
$$=\alpha|x|^{\alpha-1}\log|x|H(x)+|x|^{\alpha-1}H(x), \tag{5.17}$$
$$\frac{d}{dx}\{|x|^{\alpha}\log|x|H(-x)\}$$
$$=-\alpha|x|^{\alpha-1}\log|x|H(-x)-|x|^{\alpha-1}H(-x), \tag{5.18}$$
$$\frac{d}{dx}\{|x|^{\alpha}\log|x|\}$$
$$=\alpha|x|^{\alpha-1}\log|x|\operatorname{sgn}x+|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}x, \tag{5.19}$$
$$\frac{d}{dx}\{|x|^{\alpha}\log|x|\operatorname{sgn}x\}$$
$$=\alpha|x|^{\alpha-1}\log|x|+|x|^{\alpha-1}. \tag{5.20}$$

(証明) まず (5.9) により

$$\frac{d}{dx}\{|x|^{\alpha}\log|x|H(x)\}$$
$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}|x|^{\alpha}H(x)\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{d}{dx}|x|^{\alpha}H(x)\right\} \quad \because \ (3.15)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\alpha|x|^{\alpha-1}H(x)\} \quad \because \ (3.15.8)$$
$$=\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\{|x|^{\alpha-1}H(x)\}+|x|^{\alpha-1}H(x)$$
$$=\alpha|x|^{\alpha-1}\log|x|H(x)+|x|^{\alpha-1}H(x) \quad \because \ (5.9)$$

である. これは (5.17) である. (5.18)～(5.20) も同様に証明できる. ∎

上の微分公式で, たとえば $|x|^{\alpha}\log|x|H(x)$ は $|x|^{\alpha}H(x)$ と $\log|x|$ との積ではないが, 形式的に積として微分を行なったような結果になっている. 他の 3 つについても同様である.

§6. $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}$, $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)$, $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}\operatorname{sgn}x$

α が非整数, n が正の整数のばあいには, 標記の超関数を上で述べたのと同様の方法で導入することができる.

〔**定義 3**〕 α を非整数，n を正の整数とする．このとき

$$|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n |x|^\alpha H(x), \tag{6.1}$$

$$|x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n |x|^\alpha H(-x), \tag{6.2}$$

$$|x|^\alpha(\log|x|)^n \overset{\text{def}}{=} |x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) + |x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x), \tag{6.3}$$

$$|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} |x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) - |x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x) \tag{6.4}$$

である．

[**定理 8**] m, n を正の整数とすれば

$$x^m \cdot |x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) = |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n H(x), \tag{6.5}$$

$$x^m \cdot |x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x) = (-1)^m |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n H(-x), \tag{6.6}$$

$$x^m \cdot |x|^\alpha(\log|x|)^n = \begin{cases} |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n, & m=\text{偶数} \\ |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x, & m=\text{奇数} \end{cases} \tag{6.7}$$

$$x^m \cdot |x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x = \begin{cases} |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x, & m=\text{偶数} \\ |x|^{\alpha+m}(\log|x|)^n, & m=\text{奇数} \end{cases} \tag{6.8}$$

が成り立つ．

[**定理 9**] つぎの微分公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x)\} = \alpha|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n H(x) + n|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^{n-1} H(x), \tag{6.9}$$

$$\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x)\} = -\alpha|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n H(-x) - n|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^{n-1} H(-x), \tag{6.10}$$

$$\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha(\log|x|)^n\} = \alpha|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x + n|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^{n-1} \operatorname{sgn} x, \tag{6.11}$$

$$\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x\} = \alpha|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^n + n|x|^{\alpha-1}(\log|x|)^{n-1}. \tag{6.12}$$

上の 2 つの定理の証明は 定理 6，定理 7 と同様の方法で行なうことができる．

すなわち，

$$x^m\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n x^m, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n\frac{d}{dx}$$

という交換関係を使えばよいのである．

§7.　$x^{-m}(\log|x|)^n$, $x^{-m}(\log|x|)^n H(x)$, $x^{-m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$

上の定義3は実は定義2と定義3.12とを含んでいる．すなわち，それぞれ $n=1$, $n=0$ としたばあいに相当するのである．α は複素数であってもよいが，整数ではないという制限がついている．それは，(5.1), (5.2) の右辺で $\sin\pi\alpha$ が分母に現われているからである．ところが，$x^{-m}(\log|x|)^n H(x), \cdots$ などの超関数はすでに §3.14 で別の考え方で定義されている．それらの超関数と §6 で導入された $|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x), \cdots$ などの超関数との間には，一体，どんな関係があるのだろうか？

簡単のために，まず $n=0$ のばあい，つまり $|x|^\alpha H(x), \cdots$ などについて考えよう．

m を正の整数とすれば，$|x|^m H(x), \cdots$ などは実は (5.1)～(5.4) から導けるのである．それはつぎのように示される．$(-z)^m$ は x 軸上で正則な解析関数であるから，$\mathrm{H.F.}(-z)^m=0$ である．したがって，(5.1) は

$$|x|^\alpha H(x)=\mathrm{H.F.}\left[\frac{i\{(-z)^\alpha-(-z)^m\}}{2\sin\pi\alpha}\right] \tag{7.1}$$

と書ける．ここで $\alpha\to m$ の極限を考える．すなわち，

$\alpha=m+\varepsilon$ とおいて，$\varepsilon\to 0$ とすると，

$$\begin{aligned}(-z)^\alpha-(-z)^m &= (-z)^m\{(-z)^\varepsilon-1\}=(-z)^m\{e^{\varepsilon\mathrm{Log}(-z)}-1\}\\ &=(-z)^m\{\varepsilon\,\mathrm{Log}(-z)+O(\varepsilon^2)\},\end{aligned}$$

$$\sin\pi\alpha=\sin\pi(m+\varepsilon)=(-1)^m\sin\pi\varepsilon=(-1)^m\{\pi\varepsilon+O(\varepsilon^3)\}$$

であるから，(7.1) の右辺は $\mathrm{H.F.}\{-(1/j)z^m\,\mathrm{Log}\,(-z)\}$ $(j=2\pi i)$ に近づく．したがって，定義1の (2.1) により

$$\lim_{\alpha\to m}|x|^\alpha H(x)=\mathrm{H.F.}\{z^m H(z)\}, \tag{7.2}$$

$$H(z)=-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-z) \tag{7.3}$$

である．ここに $H(z)$ は Heaviside 関数 $H(x)$ の母関数である．したがって，(7.2) はまた

$$\lim_{\alpha\to m}|x|^\alpha H(x)=x^m H(x) \tag{7.4}$$

と書ける．同様にして

$$\lim_{\alpha\to m}|x|^\alpha H(-x) = -\text{H.F.}\{(-z)^m H(-z)\}$$
$$= (-x)^m H(-x) \tag{7.5}$$

が得られる．さらに，(7.4), (7.5) を組み合わせて

$$\lim_{\alpha\to m}|x|^\alpha = \begin{cases} x^m, & m=\text{偶数} \\ x^m \operatorname{sgn} x, & m=\text{奇数} \end{cases} \tag{7.6}$$

$$\lim_{\alpha\to m}|x|^\alpha \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x^m \operatorname{sgn} x, & m=\text{偶数} \\ x^m, & m=\text{奇数} \end{cases} \tag{7.7}$$

が得られる．これらは当然そうあるべき結果である．

α が負の整数 $-m$ に近づくばあいには，(7.1) のような変形は許されない．H.F.$(-z)^{-m} \neq 0$ だからである．しかし，$|x|^\alpha$, $|x|^\alpha \operatorname{sgn} x$ については，さいわいにも，つぎのような極限値が存在する．

$$\lim_{\alpha\to -m}|x|^\alpha = \text{H.F.}\left\{\frac{1}{z^m}\mathbf{1}(z)\right\} = \frac{1}{x^m}, \quad m=\text{偶数} \tag{7.8}$$

$$\lim_{\alpha\to -m}|x|^\alpha \operatorname{sgn} x = \text{H.F.}\left\{\frac{1}{z^m}\mathbf{1}(z)\right\} = \frac{1}{x^m}, \quad m=\text{奇数} \tag{7.9}$$

ただし，

$$\mathbf{1}(z) = H(z) - H(-z) \tag{7.10}$$

は 1 の母関数である．これを見るためには，たとえば (5.3) の右辺の母関数には

$$(-z)^\alpha - z^\alpha = (-z)^{-m+\varepsilon} - z^{-m+\varepsilon}$$
$$= (-z)^{-m}\{1+\varepsilon \operatorname{Log}(-z)+\cdots\} - z^{-m}\{1+\varepsilon \operatorname{Log} z+\cdots\}$$

が現われ，m=偶数 のばあいには $O(1)$ の項が打ち消されることに注意すればよい．(詳しい計算は読者にまかせる．) とにかく，(7.8), (7.9) の示すように，極限値として得られる超関数は前に別の立場で導入した $1/x^m$ と一致するのである．

さて，つぎに，n が任意の正の整数のばあいについて，$|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x), \cdots$ と $x^{-m}(\log|x|)^n H(x), \cdots$ との関係を調べよう．まず，(5.1) は

$$-2i \sin \pi\alpha |x|^\alpha H(x) = \text{H.F.}(-z)^\alpha \tag{7.11}$$

と書きかえられる．この両辺を α について n 回微分すると

$$-2i\left\{\sin \pi\alpha \cdot \partial^n + n\pi \cos \pi\alpha \cdot \partial^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\pi^2 \sin \pi\alpha \cdot \partial^{n-2} + \cdots\right\}$$
$$= \text{H.F.}\left[(-z)^\alpha \{\operatorname{Log}(-z)\}^n\right]$$
$$= \text{H.F.}\left[(-z)^\alpha \{-jH(z)\}^n\right] \tag{7.12}$$

が得られる．ただし，簡単のために

$$\partial^n \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n |x|^\alpha H(x) = |x|^\alpha (\log|x|)^n H(x) \tag{7.13}$$

と書いてある．ここで定義3の(6.1)が使ってある．(7.12)で $\alpha=-m$ $(m=0,1,2,\cdots)$ とおき，$\sin m\pi=0$, $\cos m\pi=(-1)^m$ に注意すると，けっきょく

$$n\partial^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\pi^2\partial^{n-3}+\frac{n!}{5!(n-5)!}\pi^4\partial^{n-5}-\cdots$$
$$=\text{H.F.}[(-j)^{n-1}z^{-m}\{H(z)\}^n] \tag{7.14}$$

が得られる．この式で順次 $n=1,2,\cdots$ とおけば

$$\partial^0=\text{H.F.}[z^{-m}H(z)], \tag{7.15}$$
$$2\partial^1=\text{H.F.}[-jz^{-m}\{H(z)\}^2], \tag{7.16}$$
$$3\partial^2-\pi^2\partial^0=\text{H.F.}[(-j)^2z^{-m}\{H(z)\}^3], \tag{7.17}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる．この1群の方程式から $\partial^0,\partial^1,\partial^2,\cdots$ が決定される．(7.13)を想い起こすと，$\alpha=-m$ とおいて，

$$x^{-m}H(x)=\text{H.F.}[z^{-m}H(z)], \tag{7.18}$$
$$x^{-m}\log|x|H(x)=\text{H.F.}\left[-\frac{j}{2}z^{-m}\{H(z)\}^2\right], \tag{7.19}$$
$$x^{-m}(\log|x|)^2H(x)=\text{H.F.}\left[\frac{j^2}{3}z^{-m}\left\{[H(z)]^3-\frac{1}{4}H(z)\right\}\right], \tag{7.20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られる．これらは前に別の立場で導入した超関数にほかならない．

$x^{-m}(\log|x|)^nH(-x)$ についても同様である．さらに

$$x^{-m}(\log|x|)^n \overset{\text{def}}{=} x^{-m}(\log|x|)^nH(x)+x^{-m}(\log|x|)^nH(-x), \tag{7.21}$$
$$x^{-m}(\log|x|)^n\operatorname{sgn}x \overset{\text{def}}{=} x^{-m}(\log|x|)^nH(x)-x^{-m}(\log|x|)^nH(-x) \tag{7.22}$$

によって左辺の超関数が定義されるのである．

§8. ベキ型の超関数

$|x|^\alpha(\log|x|)^nH(x)$, $|x|^\alpha(\log|x|)^n$, $|x|^\alpha(\log|x|)^n\operatorname{sgn}x$ などの超関数を今後簡単のために**ベキ型の超関数**とよぶことにする．ただし，α は任意の複素数，n は0または正の整数である．ベキ型の超関数についてとくに注意しなければならないのは，ベキ数 α が整数のばあいと非整数のばあいとをはっきり区

別して考えなければならないことである．それは，おのおののばあいについて超関数の定義が別々に与えられているからである．

α が非整数のばあいは話は簡単であるが，α が整数のばあいについては，もう一度その定義の意味をかみしめておく必要がある．まず，$n=0$ のばあいは定義 3.10 で $x^{-m}H(x),\cdots$ が定義され，つぎに $\alpha=0,\ n=1$ のばあいには $\log|x|H(x),\cdots$ が（ふつうの関数を見直した超関数として）導入され，つぎに，これらと x^{-m} との形式積として $n=1$ のばあいが定義され（定義 3.11），… という順序で進んだ．つまり，（ふつうの関数を見直した）超関数 $(\log|x|)^n H(x),\cdots$ と x^{-m} との形式積として整数ベキのベキ型の超関数が定義されたのである．一方，非整数ベキのベキ型の超関数からある種の極限操作を行なうことによっても，整数ベキのベキ型の超関数が得られることが前節で確かめられた．このように，整数ベキのばあいについてはベキ型の超関数の定義がいささか統一性を欠くように思われるので，この辺で改めて見通しのよい定義を与えておこう．

〔定義 4〕　α は非整数の任意の複素数，m は任意の整数，n は 0 または正の整数とする．このとき，ベキ型の超関数をつぎのように定義する．

$$|x|^{\alpha}(\log|x|)^n H(x) \overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \frac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right], \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} x^m(\log|x|)^n H(x) &\overset{\text{def}}{=} \text{H.F.}\left[\lim_{\alpha\to m}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \frac{i\{(-z)^{\alpha}-(-z)^m\}}{2\sin\pi\alpha}\right] \\ &= \text{H.F.}\left[z^m \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}P(z,\varepsilon)\right], \end{aligned} \tag{8.2}$$

ただし

$$P(z,\varepsilon) = \frac{i\{(-z)^{\varepsilon}-1\}}{2\sin\pi\varepsilon}. \tag{8.3}$$

また，α を任意の複素数とするとき

$$\left.\begin{matrix} |x|^{\alpha}(\log|x|)^n \\ |x|^{\alpha}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x \end{matrix}\right\} \overset{\text{def}}{=} |x|^{\alpha}(\log|x|)^n H(x) \pm |x|^{\alpha}(\log|x|)^n H(-x) \tag{8.4}$$

である．

（合理性）　この定義は，前に与えたものを単に表現を改めただけであるから，矛盾を含まないことは明らかであろう．なお，(8.2) の右辺の第 2 行目は第 1 行で $(-z)^m$ を lim の外にくくり出しただけの表現であることを注意しよう．∎

[定理 10]　$P(z,\varepsilon)$ は ε の解析関数であって，つぎのように ε のベキ級数に展開される．

$$P(z,\varepsilon)=H-\frac{1}{2}\varepsilon jH^2+\frac{1}{6}\varepsilon^2 j^2\left(H^3-\frac{1}{4}H\right)-\frac{1}{24}\varepsilon^3 j^3\left(H^4-\frac{1}{2}H^2\right)+\cdots. \tag{8.5}$$

ただし，$H=H(z)=-(1/j)\,\mathrm{Log}\,(-z)$ は Heaviside 関数 $H(x)$ の母関数である．

（証明）　$(-z)^\varepsilon=\exp\{\varepsilon\,\mathrm{Log}\,(-z)\}=\exp\{-\varepsilon jH(z)\}$ を ε のベキ級数に展開すればよい．読者にまかせる．▮

[定理 11]　$x^m(\log|x|)^n H(x)$ は x^m と $(\log|x|)^n H(x)$ との形式積である．また，$(\log|x|)^n H(x)$ の母関数はつぎのように与えられる．

$$\mathrm{G.F.}H(x)=H(z), \tag{8.6}$$

$$\mathrm{G.F.}\log|x|H(x)=-\frac{j}{2}H^2(z), \tag{8.7}$$

$$\mathrm{G.F.}(\log|x|)^2H(x)=\frac{j^2}{3}\left\{H^3(z)-\frac{1}{4}H(z)\right\}, \tag{8.8}$$

$$\mathrm{G.F.}(\log|x|)^3H(x)=-\frac{j^3}{4}\left\{H^4(z)-\frac{1}{2}H^2(z)\right\}, \tag{8.9}$$

…………

（証明）　(8.2) で $m=0$ とおけば

$$(\log|x|)^n H(x)=\mathrm{H.F.}\left[\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}P(z,\varepsilon)\right].$$

したがって，(8.2) は

$$x^m(\log|x|)^n H(x)=\mathrm{H.F.}\,[z^m\mathrm{G.F.}(\log|x|)^n H(x)]$$

と書ける．これは形式積の定義にほかならない．すなわち，定理の前半が証明された．つぎに，(8.5) を (8.2) に代入すれば (8.6)～(8.9) がただちに得られる．▮

[定理 12]　m は0または正の整数とする．このとき，つぎの微分公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^m}(\log|x|)^n H(x)\right\}=-\frac{m}{x^{m+1}}(\log|x|)^n H(x)$$
$$+\frac{n}{x^{m+1}}(\log|x|)^{n-1}H(x)+\frac{(-1)^m}{m!}\pi^n C_n\delta^{(m)}(x), \tag{8.10}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^m}(\log|x|)^n\right\}=-\frac{m}{x^{m+1}}(\log|x|)^n+\frac{n}{x^{m+1}}(\log|x|)^{n-1}, \tag{8.11}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x\right\} = -\frac{m}{x^{m+1}}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$$
$$+\frac{n}{x^{m+1}}(\log|x|)^{n-1} \operatorname{sgn} x + 2\frac{(-1)^m}{m!}\pi^n C_n \delta^{(m)}(x). \qquad (8.12)$$

ただし，C_n は

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} x^n \qquad (8.13)$$

の係数，すなわち

$$C_0 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{3}, \quad C_4 = \frac{7}{15}, \quad C_6 = \frac{31}{21}, \quad \cdots\cdots$$
$$C_{2p+1} = 0 \ (p = 0, 1, \cdots) \qquad (8.14)$$

である．なお，上の微分公式は m が負の整数の ばあいにも成り立つ．その際 $\delta^{(m)}(x)$ の項は自動的に消滅する．

（証明） 非整数ベキのベキ型の超関数に対する微分公式，すなわち定理 9 の証明と同じ方針で進めばよい．証明の途中で

$$\frac{\partial}{\partial z}P(z,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{z}P(z,\varepsilon) + \frac{i\varepsilon}{2\sin \pi\varepsilon}\frac{1}{z},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n}\frac{\partial}{\partial z}P(z,\varepsilon) = \frac{n}{z}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^{n-1}}{\partial \varepsilon^{n-1}}P(z,\varepsilon) + \frac{i}{2z}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n}\frac{\varepsilon}{\sin \pi\varepsilon}$$

を使う．読者にまかせる．∎

[定理 13] m を整数とすれば，ε のベキ級数として形式的につぎの関係式が成り立つ．

$$\text{H.F. } z^m P(z,\varepsilon) = x^m e^{\varepsilon \log|x|} H(x). \qquad (8.15)$$

（証明） $P(z,\varepsilon)$ は ε のベキ級数に展開できる：

$$P(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left\{\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n}P(z,\varepsilon)\right\}_{\varepsilon=0}.$$

これを (8.15) の左辺に代入し，右辺の ε に関する展開式と比較すれば，(8.2) により等式の成り立つことがわかる．∎

[定理 14] 任意の複素数 α に対して，ε のベキ級数として形式的につぎの関係が成り立つ．

$$|x|^\alpha e^{\varepsilon \log|x|} H(x) = |x|^{\alpha+\varepsilon} H(x) + \frac{\pi}{\sin \pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x). \qquad (8.16)$$

ただし，$\alpha \neq -m \ (m=1,2,\cdots)$ に対しては，右辺の第 2 項は消えるものとする．

（証明） まず，α が非整数のばあいを考える．

$$
\begin{aligned}
|x|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|x|}H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon^{n}|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon^{n}\,\mathrm{H.F.}\left[\frac{\partial^{n}}{\partial\alpha^{n}}\left\{\frac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\}\right] \qquad \because\ (8.1) \\
&= \mathrm{H.F.}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon^{n}\frac{\partial^{n}}{\partial\alpha^{n}}\left\{\frac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\} \\
&= \mathrm{H.F.}\frac{i(-z)^{\alpha+\varepsilon}}{2\sin\pi(\alpha+\varepsilon)} \qquad \because\ \varepsilon\text{に関するベキ展開} \\
&= |x|^{\alpha+\varepsilon}H(x). \qquad \because\ (3.15.4)
\end{aligned}
$$

これで (8.16) で α が非整数のばあいが得られた.

つぎに α が整数のばあいを考える. 定理 13 で $m\to -m$ とおきかえれば,

$$
\begin{aligned}
x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(x) &= \mathrm{H.F.}\,z^{-m}P(z,\varepsilon) \\
&= \mathrm{H.F.}\left[z^{-m}\frac{i}{2\sin\pi\varepsilon}\{(-z)^{\varepsilon}-1\}\right] \qquad \because\ (8.3) \\
&= \mathrm{H.F.}\left[\frac{i(-z)^{-m+\varepsilon}}{2\sin\pi(-m+\varepsilon)}\right]-\frac{i}{2\sin\pi\varepsilon}\mathrm{H.F.}\,z^{-m} \\
&= |x|^{-m+\varepsilon}H(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^{m}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x).
\end{aligned}
$$

ただし, (3.11.9) から得られる関係:

$$
\frac{1}{z^{m}} = j\frac{(-1)^{m}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(z)
$$

を使う. m が 0 または負の整数のばあいは, もちろん $\mathrm{H.F.}\,z^{-m}=0$ である. これで, α が整数のばあいが証明された. ∎

(8.16) で $x\to -x$ のおきかえをすれば, $|x|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|x|}H(-x)$ についての公式が得られる. また, それと (8.16) との和と差をつくることによって, $|x|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|x|}$, $|x|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|x|}\operatorname{sgn}x$ についての公式が得られることは明らかであろう.

負の整数ベキのベキ型超関数に関する種々の公式を求めるには, まず非整数のばあいを求め, つぎに上の定理を利用して負の整数のばあいを導くのが最も便利である. この意味で, この定理の利用価値はきわめて大きい.

§9. 発散積分の有限部分

$\varphi(z)$ が x 軸上で正則な解析関数であるとすると, 定積分

$$
\int_{0}^{a}x^{\alpha}\varphi(x)dx, \quad a>0 \tag{9.1}
$$

は $\alpha>-1$ に対しては存在するが, $\alpha<-1$ に対しては発散する. ところが, 被

積分関数を超関数と見直すことによって，この積分に意味をもたせることができるのである．いま

$$\int_{-\varepsilon}^{a}\varphi(x)|x|^{\alpha}H(x)dx,\quad a>0 \tag{9.2}$$

（ただし ε は任意の正数）を考えると，被積分関数は超関数 $|x|^{\alpha}H(x)$ と解析関数 $\varphi(x)$ の積として確かに超関数である．ところが超関数の定積分はつねに可能である．一般に $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ とすれば，定義2.13により

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{C}F(z)dz$$

だからである．しかも，$0<x\leqq a$ に対して(9.1)と(9.2)の被積分関数は一致する．それゆえ，$\alpha<-1$ のばあいでも(9.1)に意味をもたせて，それは(9.2)で与えられるとするのが自然な考え方であろう．ただし，そのばあい(9.1)自身は**発散積分**であるから，(9.2)をその**有限部分**あるいは**pf 積分**とよぶことにする．そして記号的に

$$\mathrm{pf}\int_{0}^{a}x^{\alpha}\varphi(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{a}\varphi(x)|x|^{\alpha}H(x)dx \tag{9.3}$$

と表わす．（発散積分の有限部分 partie finie の概念は最初 Hadamard によって導入されたので，pf という記号を使うことにする．）

この考え方はつぎのように拡張することができる．一般に $\int_{a}^{b}\phi(x)dx$ という定積分を扱う際に，$\phi(x)$ が $x=c\ (a<c<b)$ で特異点をもつばあい，もしも $\phi(x)H(x-c)$, $\phi(x)H(c-x)$ という形の超関数が存在するならば，つぎのように有限部分が定義できる．

〔**定義 5**〕　$\phi(z)$ は区間 $a\leqq x\leqq b$ で点 $x=c$ を除けば正則であって，かつ $\phi(x)H(c-x)$, $\phi(x)H(x-c)$ の形の超関数が存在するものとする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_{a}^{c}\phi(x)dx\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{a}^{b}\phi(x)H(c-x)dx, \tag{9.4}$$

$$\mathrm{pf}\int_{c}^{b}\phi(x)dx\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{a}^{b}\phi(x)H(x-c)dx, \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pf}\int_{a}^{b}\phi(x)dx&\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{a}^{b}\{\phi(x)H(c-x)+\phi(x)H(x-c)\}dx\\&=\mathrm{pf}\int_{a}^{c}\phi(x)dx+\mathrm{pf}\int_{c}^{b}\phi(x)dx.\end{aligned} \tag{9.6}$$

x 軸上で正則な解析関数を $\varphi(z)$ とすると，$|x|^{\alpha}\varphi(x)$, $|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}\varphi(x)$, $x^{-m}\varphi(x)$, $x^{-m}(\log|x|)^{n}\varphi(x)$, … などは上に述べた $\phi(x)$ になる．たとえば

$\varphi(x)\cdot x^{-m}(\log|x|)^n H(x)$ は超関数だからである.

[定理 15]　$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数，α は非整数とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\varphi(x)dx=\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(a)-\frac{a^{\alpha+2}\varphi'(a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{a^{\alpha+n}\varphi^{(n-1)}(a)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$$
$$+(-1)^n\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\int_0^a x^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(x)dx \tag{9.7}$$

が成り立つ．n は任意の正の整数であるが，とくに $n>-(\mathrm{Re}\,\alpha+1)$ とすれば右辺の定積分はふつうの積分として収束する．

（証明）　定義5の (9.5) で $\psi(x)\to|x|^\alpha\varphi(x)$, $c\to0$, $b\to a$, $a\to-\varepsilon$ とおきかえると

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\varphi(x)dx=\int_{-\varepsilon}^a\varphi(x)|x|^\alpha H(x)dx \tag{9.8}$$

となる．さて，(3.15.8) により，微分公式

$$\frac{d}{dx}\{|x|^\alpha H(x)\}=\alpha|x|^{\alpha-1}H(x) \tag{9.9}$$

が成り立つ．したがって，部分積分により

$$\int_{-\varepsilon}^a\varphi(x)|x|^\alpha H(x)dx$$
$$=\int_{-\varepsilon}^a\varphi(x)\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\alpha+1}|x|^{\alpha+1}H(x)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{\alpha+1}\varphi(x)|x|^{\alpha+1}H(x)\Big|_{-\varepsilon}^a-\frac{1}{\alpha+1}\int_{-\varepsilon}^a\varphi'(x)|x|^{\alpha+1}H(x)dx$$
$$=\frac{1}{\alpha+1}\varphi(a)a^{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\int_{-\varepsilon}^a\varphi'(x)|x|^{\alpha+1}H(x)dx.$$

右辺の第2項の積分をさらに部分積分によって変形する．こうして順次変形を行なえば，けっきょく

$$\int_{-\varepsilon}^a\varphi^{(n)}(x)|x|^{\alpha+n}H(x)dx=\mathrm{pf}\int_0^a\varphi^{(n)}(x)x^{\alpha+n}dx$$

という形の積分が現われる．$\mathrm{Re}\,\alpha+n>-1$ であれば，右辺の積分はふつうの積分として収束するので，pf をとり除いてもよい．つまり，(9.7) が得られる．∎

[定理 16]　$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数，m は正の整数とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^a \frac{1}{x^m}\varphi(x)dx$$

$$= -\left\{\frac{1}{m-1}\frac{\varphi(a)}{a^{m-1}}+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{\varphi'(a)}{a^{m-2}}+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}\frac{\varphi^{(m-2)}(a)}{a}\right\}$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\left\{\varphi^{(m-1)}(a)\log a+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right)\varphi^{(m-1)}(0)\right.$$

$$\left.-\int_0^a \varphi^{(m)}(x)\log x\,dx\right\} \tag{9.10}$$

が成り立つ．右辺の定積分はふつうの積分として収束する．

（証明） (3.11.11) により，

$$\frac{H(x)}{x^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\frac{H(x)}{x}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\right)\delta^{(m-1)}(x)\right] \tag{9.11}$$

が成り立つ．これを使って定理 15 の証明と同様に進むと

$$\int_{-\varepsilon}^a \varphi^{(m-1)}(x)\frac{H(x)}{x}dx$$

という形の積分が現われる．ところが，(3.12.9) により

$$\frac{1}{x}H(x)=\frac{d}{dx}\{\log|x|H(x)\} \tag{9.12}$$

である．これを上の積分に代入して部分積分を行なえば，けっきょく (9.10) が得られる．

[定理 17] Cauchy の主値 $\mathrm{P}\int_a^b x^{-m}\varphi(x)dx$ は定義 5 による有限部分である．ただし $\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数とする．

（証明） $\phi(x)=x^{-m}\varphi(x)$ とおくと，§3.7 で導入した Cauchy の主値は

$$\mathrm{P}\int_a^b \phi(x)dx=\int_a^b \phi(x)dx$$

で与えられる．ただし，$\phi(x)$ は左辺ではふつうの関数，右辺では超関数と考える．ところが，定義 5 の (9.6) によれば

$$\mathrm{pf}\int_a^b \phi(x)dx=\int_a^b \varphi(x)\{x^{-m}H(-x)+x^{-m}H(x)\}dx$$

$$=\int_a^b \varphi(x)x^{-m}dx=\int_a^b \phi(x)dx.$$

したがって $\mathrm{P}\int_a^b \phi(x)dx=\mathrm{pf}\int_a^b \phi(x)dx$ である．∎

注意 上の定理 15, 16 その他で，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数という条件がついているが，問題にしている区間（たとえば積分領域）$a\leqq x\leqq b$ で正則であれば十分である．

また，定理の証明で特徴的なことは，部分積分を行なうたびごとに下限 $x=-\varepsilon$ での値が 0 になることである($H(-\varepsilon)=0$, $\varepsilon>0$ だから)．ふつうの積分 $\int_0^a$ では下限 $x=0$ で無限大になるのに対して，$\mathrm{pf}\int_0^a=\int_{-\varepsilon}^a$ ではその無限大が自動的に消滅するのである．無限大を引き去った残りという意味で，**有限部分**の呼び名はふさわしいものであろう．ただ，読者の中には，発散積分の有限部分というのは，なにか無理につくり上げた架空の存在のような感じをもたれる方もあろうかと思われる．しかし，下の例 9，例 10 で示されるように，ふつうの積分の計算が有限部分の使用によって容易になるという現実的な効用もあるのである．

例 7

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}a^{\alpha+1}, & \alpha\neq-1\\ \log a, & \alpha=-1\end{cases}\qquad(a>0)\tag{9.13}$$

(9.9)，(9.12) を使えば容易に証明できる．読者にまかせる．

$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\varphi(x)dx$ の計算をするのに，定理 15，定理 16 は必ずしも唯一の方法ではない．たとえば，$\varphi(x)$ をベキ級数に展開して x^n の項までとったものを $\varphi_n(x)$ とすると，

$$\varphi(x)=\varphi_n(x)+R_n(x),\tag{9.14}$$

$$\varphi_n(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)x^n\tag{9.15}$$

と書ける．$R_n(x)=\varphi(x)-\varphi_n(x)$ は $O(x^{n+1})$ である．さて

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\varphi(x)dx=\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha\varphi_n(x)\,dx+\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha R_n(x)dx\tag{9.16}$$

と分解すると，右辺の第 1 項は (9.13) によってただちに計算される．また第 2 項は，n を適当に大きく選べば，ふつうの積分として計算される．つまり，(9.16) は定理 15，定理 16 の代りとして使えるのである．

例 8

$$\mathrm{pf}\int_0^1\frac{dx}{x^{5/2}(1+x)}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}.\tag{9.17}$$

(9.10)，(9.16) の両方を使って計算せよ．それぞれのばあいに

$$\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^3}=\frac{3}{8}\pi+1,\quad\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

が必要になる．

例 9

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}dx=\{\varphi(\infty)-\varphi(0)\}\log\frac{a}{b},\quad(a>0,\ b>0)\tag{9.18}$$

ただし，$\varphi(x)$ は $x\geqq0$ で正則で，$x\to\infty$ のとき $\varphi(x)=\varphi(\infty)+O(x^{-1})$ とする．

この積分はふつうの積分として収束する．したがって pf としても計算できる．

$$\int_0^\infty = \mathrm{pf}\int_0^\infty = \int_{-\varepsilon}^\infty \{\varphi(ax)-\varphi(bx)\}\frac{H(x)}{x}dx$$

$$= \int_{-\varepsilon}^\infty \{\cdots\}\frac{d}{dx}\{\log|x|H(x)\}dx$$

$$= -\int_{-\varepsilon}^\infty \{a\varphi'(ax)-b\varphi'(bx)\}\log|x|H(x)dx$$

$$= -\int_0^\infty \{a\varphi'(ax)-b\varphi'(bx)\}\log x\,dx.$$

ところが，$t=ax$ とおけば

$$\int_0^\infty a\varphi'(ax)\log x\,dx = \int_0^\infty \varphi'(t)(\log t-\log a)dt.$$

これと，a を b に変えた式とを上式に代入すれば

$$\int_0^\infty = (\log a-\log b)\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt.$$

これから (9.18) が得られる．

例 10

$$\int_0^\infty\left\{pe^{-x}-\frac{1-e^{-px}}{x}\right\}\frac{dx}{x} = p(\log p-1),\quad p>0. \tag{9.19}$$

上と同様の方法で計算できる．読者にまかせる．

§10.　pf 積 分 の 計 算

ふつうの関数の定積分を求めようとするばあいに pf 積分を利用すると便利なことが多いので，pf 積分について成り立つ関係をいくつか挙げておこう．

例 11　a は任意の正数，α は任意の複素数，m は正の整数とする．このとき

$$|ax|^\alpha H(ax) = a^\alpha|x|^\alpha H(x),\quad \alpha\neq -m \tag{10.1}$$

$$\frac{H(ax)}{(ax)^m} = \frac{1}{a^m}\frac{H(x)}{x^m}+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\log a}{a^m}\delta^{(m-1)}(x) \tag{10.2}$$

が成り立つ．

（証明）　定義 3.12，定義 3.10 により

$$|x|^\alpha H(x) = \mathrm{H.F.}\left\{\frac{i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}\right\},\quad \alpha\neq -m \tag{10.3}$$

$$x^{-m}H(x) = \mathrm{H.F.}\{z^{-m}H(z)\}, \tag{10.4}$$

$$H(z) = -(1/j)\,\mathrm{Log}\,(-z) \tag{10.5}$$

である．また，一般に $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ のとき $f(ax)=\mathrm{H.F.}\,F(az)$ $(a>0)$ であることを想い起こすと，(10.3) からただちに (10.2) が得られる．つぎに，

$$H(az) = -\frac{1}{j}\mathrm{Log}\,(-az) = -\frac{1}{j}\{\mathrm{Log}\,(-z)+\log a\}$$

$$= H(z)-(1/j)\log a \tag{10.6}$$

であるから，

$$\frac{H(ax)}{(ax)^m}=\text{H.F.}\left[\frac{1}{(az)^m}\left\{H(z)-\frac{1}{j}\log a\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a^m}\text{H.F.}\left\{\frac{1}{z^m}H(z)\right\}+\frac{\log a}{a^m}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\text{H.F.}\{\delta^{(m-1)}(z)\}.$$

ただし，(3.11.9) を使う．これは (10.2) にほかならない．▮

[定理 18] $\varphi(z)$ は x 軸の正の部分 ($x\geqq 0$) で正則な解析関数，a, R は任意の正数，α は任意の複素数，m は正の整数とする．このとき

$$\text{pf}\int_0^R \varphi(ax)x^\alpha dx = a^{-(\alpha+1)}\text{pf}\int_0^{aR}\varphi(x)x^\alpha dx, \quad \alpha\neq -m \tag{10.7}$$

$$\text{pf}\int_0^R \frac{\varphi(ax)}{x^m}dx = a^{m-1}\,\text{pf}\int_0^{aR}\frac{\varphi(x)}{x^m}dx-\frac{a^{m-1}\log a}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0) \tag{10.8}$$

が成り立つ．

（証明） 上の例 11 の関係を有限部分の定義式に代入すればよい．▮

(10.7) はふつうの定積分のばあいと同じ結果であるが，(10.8) では付加項が現われることに注意しなければならない．これは pf 積分に特徴的な現象である．

この定理を使えば上の例 9 の証明はずっと簡単になる．すなわち，$\varphi_1(x)\equiv\varphi(x)-\varphi(\infty)$ とおき，これを (10.8) の $\varphi(x)$ として使う．ただし $m=1$, $R=\infty$ とする．

例 12 α を任意の複素数，m を正の整数とすれば

$$\text{pf}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx=\Gamma(\alpha+1)=\frac{\pi}{\Gamma(-\alpha)\sin(-\pi\alpha)}, \quad \alpha\neq -m \tag{10.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{pf}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^m}dx=(-1)^{m-1}\frac{\psi(m)}{(m-1)!},\\ &\psi(m)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1}\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

が成り立つ．

まず

$$\begin{aligned}\text{pf}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx&=\int_{-\varepsilon}^\infty e^{-x}|x|^\alpha H(x)dx\\&=-\int_r \frac{e^{-z}i(-z)^\alpha}{2\sin\pi\alpha}dz \qquad \because\ (3.15.4)\\&=\frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\int_r e^{-z}(-z)^\alpha dz\\&=\Gamma(\alpha+1), \quad \alpha\neq -m.\end{aligned}$$

ただし，r は右に開いたU字形の積分路を表わし，最後の等式は Γ 関数の積分表示式であ

る．すなわち (10.9) が得られた．

つぎに

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^m}dx = \int_{-\varepsilon}^\infty \frac{e^{-x}}{x^m}H(x)\,dx$$
$$= -\int_\Gamma e^{-z}\frac{H(z)}{z^m}dz$$
$$= \frac{1}{j}\int_\Gamma e^{-z}\frac{\mathrm{Log}\,(-z)}{z^m}dz$$
$$= \frac{(-1)^m}{j}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_\Gamma e^{-z}(-z)^\alpha dz\right]_{\alpha=-m}.$$

ところが，Γ 関数の積分表示式により

$$\int_\Gamma e^{-z}(-z)^\alpha dz = 2i\sin\pi\alpha\,\Gamma(\alpha+1) = -\frac{j}{\Gamma(-\alpha)}. \tag{10.11}$$

これを上の式に入れて，$\psi(\alpha)$ の定義式

$$\frac{d}{d\alpha}\log\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \psi(\alpha) \tag{10.12}$$

を使うと (10.10) が得られる．

例 13 定理 18 と (10.10) を使って (9.19) およびつぎの結果を導け．

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x+1}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \gamma, \tag{10.13}$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}-e^{-2x}\right)\frac{dx}{x} = 1-\log 2. \tag{10.14}$$

定理 14 を使えば，例 7 と例 12 の結果をつぎの例 14 と例 15 のように一般化することができる．

例 14 α は任意の複素数，n は 0 または正の整数，$a>0$ とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha(\log x)^n dx = \begin{cases} \dfrac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\dfrac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha\neq-1 \\ \dfrac{1}{n+1}\{(\log a)^{n+1}-\pi^{n+1}C_{n+1}\}, & \alpha=-1 \end{cases} \tag{10.15}$$

が成り立つ．ただし，C_n は (8.14) で与えられる定数である．

これを証明するには

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha e^{\varepsilon\log x}dx = \int_{-\infty}^a |x|^\alpha e^{\varepsilon\log|x|}H(x)dx \tag{10.16}$$

を考える．(pf 積分の定義式 (9.3) の右辺の積分の下限 $-\varepsilon$ はもちろん $-\infty$ としてもよい！ ここでは $e^{\varepsilon\log|x|}$ の ε との混同を避けるために，積分の下限を $-\infty$ とした．)

定理 14 により，(10.16) の右辺は

$$\int_{-\infty}^a |x|^{\alpha+\varepsilon}H(x)\,dx+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^a \delta^{(m-1)}(x)dx \tag{10.17}$$

となる．ただし，第 2 項は $\alpha\neq-m$ $(m=1,2,\cdots)$ に対してはもともと存在せず，また

$\alpha=-m$ に対しては

$$\int_{-\infty}^{a}\delta^{(m-1)}(x)dx=\begin{cases}1, & m=1\\ 0, & m\neq 1\end{cases}$$

である．したがって，$\alpha\neq-1$ に対して (10.16) は

$$\mathrm{pf}\int_0^a x^\alpha e^{\varepsilon\log x}dx=\mathrm{pf}\int_0^a x^{\alpha+\varepsilon}dx=\frac{1}{\alpha+1+\varepsilon}a^{\alpha+1+\varepsilon} \tag{10.18}$$

となる．ただし，(9.13) を使う．(10.18) を ε のベキに展開して ε^n の係数を等置すれば (10.15) の $\alpha\neq-1$ のばあいが得られる．

$\alpha=-1$ のばあいには (10.17) の第 2 項は生き残り，(10.16) は

$$\mathrm{pf}\int_0^a\frac{1}{x}e^{\varepsilon\log x}dx=\frac{1}{\varepsilon}a^\varepsilon-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon\log a}-\frac{\pi\varepsilon}{\sin\pi\varepsilon}\right) \tag{10.19}$$

となる．(8.13) を考慮して両辺を ε のベキに展開すれば，(10.15) の $\alpha=-1$ のばあいが得られるのである．

例 15　α は任意の複素数，m は正の整数，$a>0$ とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}e^{\varepsilon\log x}dx=\begin{cases}\Gamma(\alpha+1+\varepsilon), & \alpha\neq-m\\ \dfrac{(-1)^{m-1}\pi}{\Gamma(m)\sin\pi\varepsilon}\left\{\dfrac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\varepsilon)}-1\right\}, & \alpha=-m\end{cases} \tag{10.20}$$

が成り立つ．また，これから

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty x^\alpha(\log x)^n e^{-x}dx=\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\Gamma(\alpha+1),\quad \alpha\neq-m \tag{10.21}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pf}\int_0^\infty x^{-m}e^{-x}dx=\frac{(-1)^{m-1}}{\Gamma(m)}\,\psi(m),\\
&\mathrm{pf}\int_0^\infty x^{-m}\log x\,e^{-x}dx=\frac{(-1)^{m-1}}{2\Gamma(m)}\{\psi'(m)+[\psi(m)]^2\},\\
&\mathrm{pf}\int_0^\infty x^{-m}(\log x)^2e^{-x}dx=\frac{(-1)^{m-1}}{3\Gamma(m)}\{\psi''(m)-3\psi'(m)\psi(m)\\
&\qquad\qquad+[\psi(m)]^3+\pi^2\psi(m)\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{10.22}$$

が得られる．ただし，$n=0,1,2,\cdots$，また，$\psi(x)=\dfrac{d}{dx}\log\Gamma(x)$ である．

証明の方針は例 14 と同様である．まず

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}\int_0^\infty x^\alpha e^{\varepsilon\log x}e^{-x}dx&=\int_{-\infty}^\infty |x|^\alpha e^{\varepsilon\log|x|}e^{-x}H(x)dx\\
&=\int_{-\infty}^\infty\left\{|x|^{\alpha+\varepsilon}H(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x)\right\}e^{-x}dx\\
&=\mathrm{pf}\int_0^\infty x^{\alpha+\varepsilon}e^{-x}dx+\frac{\pi(-1)^m}{\sin\pi\varepsilon\Gamma(m)}\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\delta^{(m-1)}(x)dx\\
&=\Gamma(\alpha+1+\varepsilon)+\frac{(-1)^m\pi}{\Gamma(m)\sin\pi\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{10.23}$$

ただし，(10.9) と (2.6.4) を使う．また (10.23) の第 2 項は $\alpha\neq-m$ に対しては消える．これで (10.20) の $\alpha\neq-m$ のばあいが得られた．

$\alpha=-m$ に対しては

$$\Gamma(-m+1+\varepsilon)=\frac{\pi}{\Gamma(m-\varepsilon)\sin\pi(m-\varepsilon)}=\frac{\pi(-1)^{m-1}}{\Gamma(m-\varepsilon)\sin\pi\varepsilon}.$$

したがって，(10.20) の $\alpha=-m$ のばあいが得られる．

(10.20) を ε のベキに展開すれば，(10.21) はただちに得られる．(10.22) を得るには

$$\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\varepsilon)}=\exp\{\log\Gamma(m)-\log\Gamma(m-\varepsilon)\}$$
$$=\exp\left[\varepsilon\psi(m)-\frac{\varepsilon^2}{2!}\psi'(m)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\psi''(m)-\cdots\right]$$

と (8.13) とを考慮すればよい．

[定理 19] $a>0$ とすれば，任意の複素数 α に対して，ε のベキ級数として形式的につぎの関係が成り立つ．

$$|ax|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|ax|}H(ax)$$
$$=a^{\alpha}\left\{|x|^{\alpha}e^{\varepsilon(\log|x|+\log a)}H(x)-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}(a^{\varepsilon}-1)\delta^{(m-1)}(x)\right\}. \tag{10.24}$$

ただし，$\alpha\neq-m$ ($m=1,2,\cdots$) に対しては，括弧内の第 2 項は消えるものとする．これを ε のベキに展開すれば，$|ax|^{\alpha}(\log|ax|)^n H(ax)$ を $|x|^{\alpha}(\log|x|)^n H(x)$ と $\delta^{(m-1)}(x)$ で表わすことができる．

(証明) 定理 14 の (8.16) で x の代りに ax とおけば

$$|ax|^{\alpha}e^{\varepsilon\log|ax|}H(ax)$$
$$=|ax|^{\alpha+\varepsilon}H(ax)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(ax)$$
$$=a^{\alpha+\varepsilon}|x|^{\alpha+\varepsilon}H(x)+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^m a^{-m}}{\Gamma(m)}\delta^{(m-1)}(x).$$

ただし，(10.1), (3.10.19) を使う．この右辺の第 1 項にふたたび (8.16) の関係を適用すれば，ただちに (10.24) が得られる．▮

[定理 20] $\varphi(z)$ は $x\geqq0$ で正則な解析関数，a, R は任意の正数，α は任意の複素数とする．このとき，ε のベキ級数として形式的につぎの関係が成り立つ．

$$\mathrm{pf}\int_0^R\varphi(ax)x^{\alpha-1}e^{\varepsilon\log x}dx$$
$$=a^{-\alpha}\left\{a^{-\varepsilon}\,\mathrm{pf}\int_0^{aR}\varphi(x)x^{\alpha+\varepsilon-1}dx-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{\varphi^{(p)}(0)}{\Gamma(p+1)}\right\}, \tag{10.25}$$
$$=a^{-\alpha}\left\{a^{-\varepsilon}\,\mathrm{pf}\int_0^{aR}\varphi(x)x^{\alpha-1}e^{\varepsilon\log x}dx+\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{a^{-\varepsilon}-1}{\Gamma(p+1)}\varphi^{(p)}(0)\right\}. \tag{10.26}$$

ただし，$\alpha \neq -p$ $(p=0, 1, 2, \cdots)$ に対しては，括弧内の第2項は消えるものとする.

[定理 21]　$\varphi(z)$ は $x \geqq 0$ で正則な解析関数，α は複素数，ν, a は正数とする．このとき，ε のベキ級数として形式的につぎの関係が成り立つ.

$$\mathrm{pf}\int_0^a \varphi(x^\nu) x^{\alpha-1} e^{\varepsilon \log x} dx$$

$$= \frac{1}{\nu} \mathrm{pf}\int_0^{a^\nu} \varphi(x) x^{(\alpha+\varepsilon)/\nu-1} dx - \frac{\pi}{\sin \pi\varepsilon} \frac{\varphi^{(p)}(0)}{\Gamma(p+1)}. \tag{10.27}$$

ただし，$\alpha \neq -p\nu$ $(p=0, 1, 2, \cdots)$ に対しては第2項は消えるものとする．したがって，またつぎの関係が成り立つ.

$$\mathrm{pf}\int_0^a \varphi(x^\nu) x^{\alpha-1} (\log x)^n dx$$

$$= \frac{1}{\nu^{n+1}} \mathrm{pf}\int_0^{a^\nu} \varphi(x) x^{\alpha/\nu-1} (\log x)^n dx + \frac{C_{n+1}}{n+1} \pi^{n+1} \left(\frac{1}{\nu^{n+1}} - 1\right) \frac{\varphi^{(p)}(0)}{\Gamma(p+1)}. \tag{10.28}$$

ただし，C_n は (8.14) で与えられる定数である.

上の2つの定理は定理19を使えば容易に証明できる．読者にまかせる.

例 16　(10.25) で $\varphi(x)=1$, $a=1$, $R=\infty$ とおけば，例14のばあいになる．また，$\varphi(x)=e^{-x}$ とおけば，例15のばあいになる.

例 17　$I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} (\log x)^n dx$ $(a>0,\ b>0)$ とすれば

$$I_0 = \log b - \log a,$$

$$I_1 = (\log b - \log a)\psi(1) + \frac{1}{2}\{(\log a)^2 - (\log b)^2\},$$

$$I_2 = (\log a - \log b)\left\{\psi'(1) - [\psi(1)]^2 - \frac{\pi^2}{3}\right\}$$

$$+ \{(\log a)^2 - (\log b)^2\}\psi(1) - \frac{1}{3}\{(\log a)^3 - (\log b)^3\},$$

$$I_3 = (\log b - \log a)\{\psi''(1) - 3\psi'(1)\psi(1) + [\psi(1)]^3 + \pi^2\psi(1)\}$$

$$-\frac{3}{2}\{(\log a)^2 - (\log b)^2\}\left\{\psi'(1) - [\psi(1)]^2 - \frac{\pi^2}{3}\right\}$$

$$-\{(\log a)^3 - (\log b)^3\}\psi(1) + \frac{1}{4}\{(\log a)^4 - (\log b)^4\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これらを導くには，(10.22) と定理20を使えばよい.

例 18　つぎの結果を導け．

$$\mathrm{pf}\int_{-\infty}^{\infty} x^{-4}e^{-x^2}\,dx=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \tag{10.29}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-x^2}}{x}\log x\,dx=\frac{3}{8}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right). \tag{10.30}$$

ヒント　$\psi(1)=-\gamma$，$\psi'(1)=\pi^2/6$．

§11.　ま　と　め

パラメーター α を含む超関数 $f(x,\alpha)$ について一般論を行なった．たとえば，α についての極限操作 $\lim_{\alpha}$ や微分演算 $\partial/\partial\alpha$ が定義された．これによって新しい超関数を続々導入することが可能になった．ベキ型の超関数，すなわち $|x|^{\alpha}(\log|x|)^n H(x),\cdots$ などがその例である．とくに，整数ベキと非整数ベキの関係が明らかになった．また，発散積分の有限部分という概念が自然に導入され，これを pf 積分と名づけた．前に説明した Cauchy の主値積分は実はその特別なばあいとして含まれるのである．pf 積分はふつうの定積分の計算にも利用される．その実際的な計算方法を具体的に説明した．

5 Fourier 変換

§1. は じ め に

前章までで超関数に関する一般論と初等的な超関数の具体例についての立ち入った議論は一応完了した．これで，超関数についての微分や積分の計算も，ふつうの関数とまったく同じ方法で支障なく行なえる素地が得られたわけである．この章では，超関数についての Fourier 変換の理論にはいる．理工学に現われる諸問題を Fourier 変換を使って扱うことがしばしばあるが，その際，関数の範囲を超関数まで拡げることによって，とり扱いが非常に簡単になるのである．

§2. Fourier 変換の定義

ふつうの関数 $f(x)$ に対して

$$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx \tag{2.1}$$

で定義される関数 $g(\xi)$ を，$f(x)$ の **Fourier 変換**とよぶ．このばあい，$f(x)$ は $g(\xi)$ の **Fourier 逆変換**とよばれ

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}g(\xi)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{jx\xi}d\xi \tag{2.2}$$

のように表わされることが知られている．($\mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{F}$ の**逆変換**の意味である．)
(2.2) の右辺の積分変数 ξ を $-\xi$ に変えて (2.1) と比較すれば容易にわかるように

$$\mathcal{F}^{-1}g(\xi)=\mathcal{F}g(-\xi) \tag{2.3}$$

という関係が成り立つ．

さて，(2.1), (2.2) の定義式が意味をもつためには，右辺の積分が存在することが必要である．$f(x)$, $g(\xi)$ を**ふつうの関数**とすると，これはかなりきつい制限である．たとえば，$f(x)=1$, $f(x)=x^n$ のようなごく簡単な関数についても Fourier 変換が定義されないことになる．そこで，$f(x)$ を**超関数**と見直すことによってこの制限をとり除き，(2.1), (2.2) の関係がふつうお目にかかる

関数についていつでも成り立つようにしようというのがわれわれの目標である．

まず

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\jmath\xi x}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)e^{-\jmath\xi x}dx \tag{2.4}$$

であることに注意しよう．$e^{-\jmath\xi z}$ は x 軸上で正則な解析関数であるから，$f(x)$ を超関数とすると $f(x)e^{-\jmath\xi x}$ も超関数である．ところが，超関数の定積分の定義 2.13 によれば，超関数の定積分は図 1 で示すような，2 点 $z=a$, $z=b$ を通る任意の閉曲線Cに沿っての母関数の 1 周積分で表わされる．そこで，この閉曲線を図のように 2 つの部分 l, r に分割して考えると

$$\int_a^b = -\int_C = \int_l - \int_r$$

とすることができる．ただし l と r の分点 c_+, c_- はそれぞれ上半平面および下半平面にある任意の点であって，l と r に沿う積分は図の矢印の向きにとるものとする．こうして

$$\int_a^b f(x)e^{-\jmath\xi x}dx = \left(\int_l - \int_r\right)F(z)e^{-\jmath\xi z}dz \tag{2.5}$$

が得られる．ただし，$F(z) = \text{G.F.} f(x)$ である．

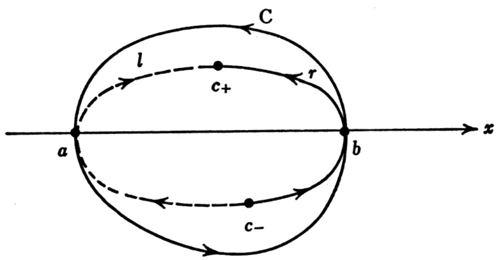


図 1

つぎに，実数 ξ を複素数 $\zeta = \xi + i\eta$ に一般化する．

$$\zeta z = (\xi + i\eta)(x + iy) = (\xi x - \eta y) + i(\eta x + \xi y)$$

であるから，

$$|e^{-\jmath\zeta z}| = e^{2\pi(\eta x + \xi y)}$$

となり，$\eta > 0$ に対しては $x \to -\infty$ のとき，また $\eta < 0$ に対しては $x \to +\infty$ のとき，これは指数関数的に 0 になる．したがって，$|F(z)|$ が $z \to \pm\infty$ に対して指数関数的に ∞ にならないかぎり，(2.5) の $\int_l$ は $\eta > 0$ に対しては $a \to -\infty$ の

ばあいでも収束し，また$\int_r$ は$\eta<0$に対しては$b\to+\infty$ のばあいでも収束する．すなわち，図2に示すような左右に無限にのびた積分路l, rをとっても，

$$
\begin{aligned}
G_+(\zeta) &= \int_l F(z)e^{-i\zeta z}dz, \\
G_-(\zeta) &= \int_r F(z)e^{-i\zeta z}dz
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

は収束する．

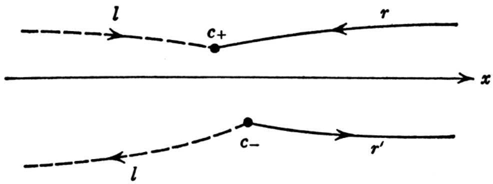


図 2

$F(z)e^{-i\zeta z}$ はζの解析関数であるから，それの積分として$G_+(\zeta), G_-(\zeta)$はそれぞれ$\mathrm{Im}\,\zeta>0$, $\mathrm{Im}\,\zeta<0$に対して正則なζの解析関数である．したがって，これらをそれぞれ上成分および下成分とする解析関数$G(\zeta)=[G_+(\zeta), G_-(\zeta)]$は超関数の母関数としての資格を備えている．しかも，$f(x)$が**ふつうの関数**で，かつ$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$が存在するばあいには

$$
\begin{aligned}
\text{H.F. } G(\zeta) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\{G_+(\xi+i\varepsilon)-G_-(\xi-i\varepsilon)\} \\
&= G_+(\xi)-G_-(\xi) \\
&= \left(\int_l-\int_r\right)F(z)e^{-i\xi z}dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx
\end{aligned}
$$

のような変形が許されることは容易に確かめられる．したがって，この$G(\zeta)$は**超関数**$f(x)$のFourier変換$g(\xi)$に対する母関数としてふさわしいものと考えられる．そこで，つぎのように定義する．

〔**定義 1**〕 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$とする．このとき，$F(z)$と$f(x)$のFourier変換を

$$G(\zeta)=\mathfrak{F}F(z)\overset{\text{def}}{=}\left[\int_l, \int_r\right]F(z)e^{-i\zeta z}dz, \tag{2.7}$$

$$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F. } G(\zeta) \tag{2.8}$$

で定義する．ただし，l は2つの半無限曲線$-\infty\to c_+$, $c_-\to-\infty$より成る積

分路，r は2つの半無限曲線 $+\infty\to c_+$, $c_-\to+\infty$ より成る積分路であって，$\mathrm{Im}\,c_+>0$, $\mathrm{Im}\,c_-<0$ とする(図2)．x 軸上の点 $z=c$（c は実数）で $F(z)$ が正則，あるいは積分可能のばあいには，$c_+=c=c_-$ ととることができる．このばあい，積分路 l, r はそれぞれ左および右に開いたU字形の曲線になる(図3)．

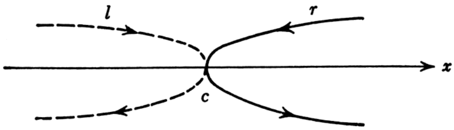


図 3

積分路 l, r は母関数 $F(z)$ が正則な領域Dに含まれるかぎり，すなわち，l と r とで囲まれる帯状の領域から x 軸を除いた領域内に $F(z)$ の特異点が含まれていさえしなければ，まったく任意に選べる．したがって，分点 c_+, c_- も任意である．（このことは定義1を導くにあたっての考察から明らかであろう．）実際，別の分点 c_+', c_-' をとると $G(\zeta)$ には

$$\Phi(\zeta)\equiv\int_{c_+}^{c_+'}F_+(z)e^{-i\zeta z}dz+\int_{c_-}^{c_-'}F_-(z)e^{-i\zeta z}dz$$

だけの変化が生ずるが，これは ζ の解析関数であるから，$g(\xi)=\mathrm{H.F.}G(\zeta)$ には変化を生じないのである．$F(z)$ の上成分 $F_+(z)$ と下成分 $F_-(z)$ は一般に別々の解析関数であって，それぞれの関数は，x 軸上に特異点をもち得る．（しかし通常その個数は有限個である．）それらの特異点を避けて x 軸上に点 $z=c$ をとると，これを c_+, c_- として使うことができるというのが，上の定義1の後段で述べたことの意味である．

なお，l, r としてU字形の積分路を採用したばあいには，超関数の定積分の定義2.13を想い起こすと

$$\int_l F(z)e^{-i\zeta z}dz=\int_{-\infty}^{c}f(x)e^{-i\zeta x}dx,$$

$$\int_r F(z)e^{-i\zeta z}dz=\int_{+\infty}^{c}f(x)e^{-i\zeta x}dx$$

であるから，下の定理1が得られる．$f(x)$ がふつうの関数のばあいには，母関数 $F(z)$ を仲介とすることなく直接に Fourier 変換が求められるという点で，この定理は有用である．

[定理 1]　超関数 $f(x)$ が点 $x=c$ で正則あるいは積分可能であれば，その

Fourier 変換の母関数は

$$G(\zeta)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{+\infty}^{c}\right]f(x)e^{-j\zeta x}dx \tag{2.9}$$

で与えられる.

Fourier 変換の定義1からつぎの定理は明らかである.

[定理 2]　Fourier 変換は線形の演算である. すなわち, 任意の超関数

$$f_1(x)=\text{H.F. }F_1(z),\quad f_2(x)=\text{H.F. }F_2(z)$$

と任意の定数 c_1, c_2 に対して

$$\mathfrak{F}\{c_1F_1(z)+c_2F_2(z)\}=c_1\mathfrak{F}F_1(z)+c_2\mathfrak{F}F_2(z), \tag{2.10}$$

$$\mathfrak{F}\{c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\}=c_1\mathfrak{F}f_1(x)+c_2\mathfrak{F}f_2(x) \tag{2.11}$$

が成り立つ.

例 1　$F(z)=1_+(z),\quad f(x)=1$
について Fourier 変換を考えよう. まず, 定義1を使い, $c=0$ とする. $F_-(z)=0$ であるから, 積分路は図4のようになる. したがって

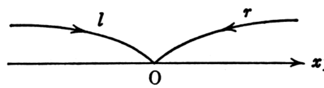


図 4

$$G_+(\zeta)=\int_{-\infty}^{0}e^{-j\zeta z}dz=-\frac{e^{-j\zeta z}}{j\zeta}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{j\zeta},$$

$$G_-(\zeta)=\int_{\infty}^{0}e^{-j\zeta z}dz=-\frac{e^{-j\zeta z}}{j\zeta}\Big|_{\infty}^{0}=-\frac{1}{j\zeta}.$$

ここでとくに注意すべきは, $\operatorname{Im}\zeta\gtrless 0$ に応じて $e^{-j\zeta z}$ が $z=\mp\infty$ で0になることである. けっきょく

$$G(\zeta)=-\frac{1}{j\zeta}=\delta(\zeta). \tag{2.12}$$

$$\therefore\quad g(\xi)=\text{H.F. }\delta(\zeta)=\delta(\xi).$$

すなわち

$$\mathfrak{F}1=\delta(\xi) \tag{2.13}$$

である.

定理1を使っても, 計算はほとんど同じである. 読者にまかせよう.

例 2　$F(z)=\delta(z)$, $f(x)=\delta(x)$ について Fourier 変換を考えよう. まず, 定義1で $c>0$ として図3の積分路を使う.

$$G_+(\zeta)=\int_l\delta(z)e^{-j\zeta z}dz=-\frac{1}{j}\int_l\frac{e^{-j\zeta z}}{z}dz.$$

被積分関数は $z=0$ に1位の極をもち, その留数は1である. l の向きに注意すれば

$$G_+(\zeta)=-\frac{1}{j}\times(-2\pi i)=1.$$

$G_-(\zeta)$ は $G_+(\zeta)$ と同じ形の積分であるが，積分路 r の内部には特異点 $z=0$ を含まない．したがって $G_-(\zeta)=0$ である．けっきょく

$$G(\zeta)=[1,0]=1_+(\zeta).$$
$$\therefore\quad g(\xi)=\mathrm{H.F.}\,1_+(\zeta)=1.$$

すなわち次の式が成り立つ．

$$\mathcal{F}\delta(\xi)=1. \tag{2.14}$$

定理1を使えば計算はずっと簡単になる．すなわち

$$G(\zeta)=\left[\int_{-\infty}^{c},\int_{\infty}^{c}\right]\delta(x)e^{-j\zeta x}dx \quad (c>0)$$
$$=[1,0]$$

が，δ 関数の性質を使えば，ただちに得られるからである．

例 3 Heaviside 関数 $H(x)$

このばあいは定義1による計算はめんどうである．しかし，定理1で $c=0$ とすれば，

$$G_+(\zeta)=\int_{-\infty}^{0}H(x)e^{-j\zeta x}dx=0,$$
$$G_-(\zeta)=\int_{\infty}^{0}H(x)e^{-j\zeta x}dx=\int_{\infty}^{0}e^{-j\zeta x}dx$$
$$=-\frac{1}{j\zeta}.$$
$$\therefore\quad G(\zeta)=\left[0,-\frac{1}{j\zeta}\right]=\frac{1}{j\zeta}1_-(\zeta)$$
$$=\frac{1}{j\zeta}\left\{1(\zeta)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{j\zeta}1(\zeta)+\frac{1}{2}\delta(\zeta).$$
$$\therefore\quad g(\xi)=\mathrm{H.F.}\,G(\zeta)=\frac{1}{j\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi).$$

すなわち次の式が成り立つ．

$$\mathcal{F}H(x)=\frac{1}{j\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi). \tag{2.15}$$

§3. Fourier 変換に関する定理

なにかある超関数の Fourier 変換を求めようとするばあい，これを既知の Fourier 変換に帰着させて計算するのが便利なことが多いので，これについての定理を述べておこう．

[定理 3] $\mathcal{F}F(z)=G(\zeta)$ とすれば

$$\mathcal{F}F(-z)=G(-\zeta), \tag{3.1}$$
$$\mathcal{F}\overline{F}(z)=-\overline{G}(-\zeta), \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{F}\bar{F}(-z) = -\bar{G}(\zeta) \tag{3.3}$$

が成り立つ.

（証明）　定義1により

$$\mathfrak{F}F(-z) = \left[\int_l, \int_r\right] F(-z)e^{-j\zeta z}dz$$

である．ただし，積分路 l, r は図2に示すものとする．積分変数を $t=-z$ にかえると，積分路は図5の l', r' にかわり，これらはそれぞれ r, l を逆向きに進む積分路になる．すなわち

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}F(-z) &= \left[\int_{l'}, \int_{r'}\right] F(t)e^{-j(-\zeta)t}(-dt) \\
&= \left[\int_r, \int_l\right] F(t)e^{-j(-\zeta)t}dt \\
&= [G_-(-\zeta), G_+(-\zeta)] \qquad \because \text{ 定義1} \\
&= G(-\zeta)
\end{aligned}$$

である．最後の変換では，母関数の引数の符号をかえると上成分と下成分が入れかわることが使われている．（これは (3.2.2) の関係である.）これで (3.1) が証明された.

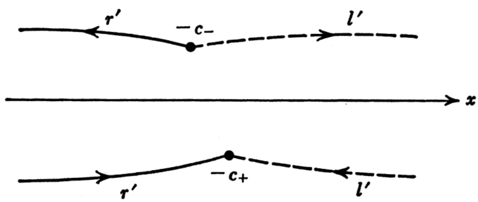


図　5

つぎに (3.2) を証明しよう．まず，定義1により

$$\mathfrak{F}\bar{F}(z) = \left[\int_l, \int_r\right] \bar{F}(z)e^{-j\zeta z}dz.$$

これの複素共役をとると

$$\overline{\mathfrak{F}\bar{F}(z)} = \left[\int_l, \int_r\right] F(\bar{z})e^{j\bar{\zeta}\bar{z}}d\bar{z}$$

である．積分変数を $t=\bar{z}$ にかえると積分路は l, r の x 軸に関する鏡像 $\bar{l}, \bar{r}$ となり，積分をとる向きが l, r に対してちょうど逆になっている(図6)．したがって

$$\overline{\mathfrak{F}\bar{F}(z)} = -\left[\int_l, \int_r\right] F(t)e^{-j(-\bar{\zeta})t}dt = -G(-\bar{\zeta})$$

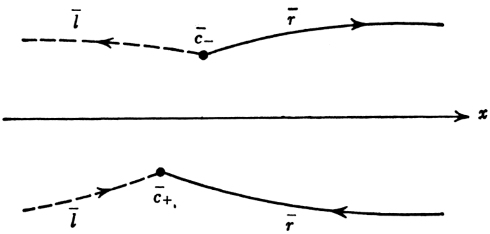


図 6

のようになる．これの複素共役をとれば (3.2) が得られる．

最後に，

$$H(z) \equiv \bar{F}(z),\quad K(\zeta) = \mathfrak{F}H(z)$$

とおいてみる．そうすると，(3.2) により

$$K(\zeta) = \mathfrak{F}\bar{F}(z) = -\bar{G}(-\zeta)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\bar{F}(-z) &= \mathfrak{F}H(-z)\\ &= K(-\zeta) \qquad \because\ (3.1)\\ &= -\bar{G}(\zeta)\end{aligned}$$

が得られる．これは (3.3) にほかならない．▮

[定理 4] $\mathfrak{F}f(x) = g(\xi)$ とすれば

$$\mathfrak{F}f(-x) = g(-\xi), \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{F}\overline{f(x)} = \overline{g(-\xi)}, \tag{3.5}$$

$$\mathfrak{F}\overline{f(-x)} = \overline{g(\xi)} \tag{3.6}$$

が成り立つ．

（証明） $f(x) = \text{H.F.}\,F(z)$ とすれば $F(z) = \text{G.F.}\,f(x)$ であるから，定義 1 の (2.8) は

$$\mathfrak{F}f(x) = \text{H.F.}\,\mathfrak{F}\{\text{G.F.}\,f(x)\} \tag{3.7}$$

と書き表わすことができる．したがって

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}f(-x) &= \text{H.F.}\,\mathfrak{F}\{\text{G.F.}\,f(-x)\}\\ &= \text{H.F.}\,\mathfrak{F}\{-F(-z)\} \qquad \because\ \text{定義 3.1}\\ &= \text{H.F.}\{-G(-\zeta)\} \qquad \because\ (3.1)\\ &= g(-\xi) \qquad \because\ \text{定義 3.1}\end{aligned}$$

である．すなわち (3.4) が証明された．

同様に,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\overline{f(x)} &= \text{H.F.}\,\mathcal{F}\{\text{G.F.}\,\overline{f(x)}\}\\ &= \text{H.F.}\,\mathcal{F}\{-\overline{F}(z)\} \qquad \because\ \text{定義 3.3}\\ &= \text{H.F.}\,\overline{G}(-\zeta) \qquad \because\ (3.2)\\ &= \overline{g(-\xi)} \qquad \because\ \text{定義 3.1, 定義 3.3}\end{aligned}$$

が得られる．すなわち (3.5) である．

最後に

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\overline{f(-x)} &= \text{H.F.}\,\mathcal{F}\{\text{G.F.}\,\overline{f(-x)}\}\\ &= \text{H.F.}\,\mathcal{F}\overline{F}(-z)\\ &= \text{H.F.}\{-\overline{G}(\zeta)\} \qquad \because\ (3.3)\\ &= \overline{g(\xi)}.\end{aligned}$$

すなわち (3.6) が得られる．∎

[定理 5]　超関数 $f(x)$ の Fourier 変換に際して

（i）偶奇性は不変である．

（ii）$f(x)$ が偶ならば虚実性は不変，奇ならば変化する．

（証明）$f(x)$ の偶, 奇に応じて

$$f(x) = \pm f(-x) \tag{3.8}$$

の上号または下号の等式が成り立つ. 両辺の Fourier 変換をとり，$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ とおけば，(3.4) によって

$$g(\xi) = \pm\mathcal{F}f(-x) = \pm g(-\xi)$$

が成り立つ．すなわち $f(x)$ と $g(\xi)$ は同じ偶奇性をもつ．これで（i）が証明された．

さて，$f(x)$ が実超関数あるいは虚超関数というのは，それぞれ

$$f(x) = \pm\overline{f(x)} \tag{3.9}$$

の上号あるいは下号の等式が成り立つことである．両辺の Fourier 変換をとると，(3.5) によって

$$g(\xi) = \pm\mathcal{F}\overline{f(x)} = \pm\overline{g(-\xi)} \tag{3.10}$$

が得られる．もしも $f(x)$ が偶ならば，（i）によって $g(\xi)$ も偶であるから $g(-\xi) = g(\xi)$ となり，上の等式 (3.10) は

$$g(\xi) = \pm\overline{g(\xi)}$$

となる．これを (3.9) と見比べると，$f(x)$ と $g(\xi)$ が同じ虚実性をもつことが

わかる．またもし$f(x)$が奇ならば，$g(\xi)$も奇であるから，$g(-\xi)=-g(\xi)$となり，(3.10)は

$$g(\xi)=\mp\overline{g(\xi)}$$

となる．すなわち$f(x)$と$g(x)$の虚実性は入れかわる．▮

[定理 6] $\mathfrak{F}F(z)=G(\zeta)$とする．また$a,b,k$は実数の定数とする．このとき

(i) $\mathfrak{F}F(az+b)=\dfrac{1}{|a|}e^{j(b/a)\zeta}G\left(\dfrac{\zeta}{a}\right),$ (3.11)

(ii) $\mathfrak{F}\{e^{jkz}F(z)\}=G(\zeta-k),$ (3.12)

(iii) $\mathfrak{F}\{zF(z)\}=-\dfrac{1}{j}\dfrac{d}{d\zeta}G(\zeta),$ (3.13)

(iv) $\mathfrak{F}F'(z)=j\zeta G(\zeta)$ (3.14)

が成り立つ．

(証明)

$$\mathfrak{F}F(az+b)=\left[\int_l,\int_r\right]F(az+b)e^{-j\zeta z}dz.$$

積分変数を$t=az+b$にかえると

$$=\left[\int_{l'},\int_{r'}\right]F(t)e^{-j\zeta(t-b)/a}\frac{1}{a}dt$$

$$=\frac{1}{a}e^{jb\zeta/a}\left[\int_{l'},\int_{r'}\right]F(t)e^{-j\zeta t/a}dt.$$

ただし，積分路l',r'は，$a>0$ならばl,rと同様の性質をもち，$a<0$ならば$-r,-l$と同様の性質をもつ．(図5を想起せよ．) したがって

$$\mathfrak{F}F(az+b)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}e^{jb\zeta/a}G(\zeta/a), & a>0\\ -\dfrac{1}{a}e^{jb\zeta/a}G(\zeta/a), & a<0\end{cases}$$

である．これは(3.11)にほかならない．

つぎに

$$\mathfrak{F}\{e^{jkz}F(z)\}=\left[\int_l,\int_r\right]e^{jkz}F(z)e^{-j\zeta z}dz$$

$$=\left[\int_l,\int_r\right]F(z)e^{-j(\zeta-k)z}dz$$

$$=G(\zeta-k).$$

すなわち，(3.12)が得られた．

つぎに

$$\frac{d}{d\zeta}G(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}\left[\int_l,\int_r\right]F(z)e^{-j\zeta z}dz$$
$$=\left[\int_l,\int_r\right](-jz)F(z)e^{-j\zeta z}dz$$
$$=-j\mathfrak{F}\{zF(z)\}.$$

これは (3.13) である.

最後に

$$\mathfrak{F}F'(z)=\left[\int_l,\int_r\right]F'(z)e^{-j\zeta z}dz$$
$$=\{F(z)e^{-j\zeta z}\}\Big|+j\zeta\left[\int_l,\int_r\right]F(z)e^{-j\zeta z}dz$$
$$\cong j\zeta G(\zeta).$$

ただし，上の第2行目は部分積分によって得られる．そして，その第1項は

$$\{F(z)e^{-j\zeta z}\}\Big|=\begin{bmatrix}F(c_+)e^{-jc_+\zeta}-F(c_-)e^{-jc_-\zeta}\\ F(c_+)e^{-jc_+\zeta}-F(c_-)e^{-jc_-\zeta}\end{bmatrix}$$

であって，上・下両成分は同一の解析関数であるから0と同等なのである．母関数については，同等なものは同一視してもよいから，けっきょく (3.14) が成り立つことになる. ▮

注意　蛇足ながら，$G(\zeta/a)$ の上・下両成分は $G(\zeta)$ のそれらとつぎの関係にあることを注意しておく.

$$G\left(\frac{\zeta}{a}\right)=\begin{cases}[G_+(\zeta/a),G_-(\zeta/a)], & a>0\\ [G_-(\zeta/a),G_+(\zeta/a)], & a<0.\end{cases}$$

これを忘れると，(3.11) の $a<0$ のばあいの証明にとまどいを感ずるかもしれない.

[定理 7]　$\mathfrak{F}f(x)=g(\xi)$ とする．また a,b,k は実数の定数とする．このとき

（i）　$\mathfrak{F}f(ax+b)=\dfrac{1}{|a|}e^{j(b/a)\xi}g\left(\dfrac{\xi}{a}\right)$,　　(3.15)

（ii）　$\mathfrak{F}\{e^{jkx}f(x)\}=g(\xi-k)$,　　(3.16)

（iii）　$\mathfrak{F}\{xf(x)\}=-\dfrac{1}{j}g'(\xi)$,　　(3.17)

（iv）　$\mathfrak{F}f'(x)=j\xi g(\xi)$　　(3.18)

が成り立つ.

（証明）　$\mathfrak{F}f(x)=\mathfrak{F}\,\mathrm{H.F.}\,F(z)=\mathrm{H.F.}\,\mathfrak{F}F(z)$ の関係を使えば，上の定理6からただちに導かれる．その際

$$\text{H.F.}\,F(az+b) = \operatorname{sgn} a\, f(ax+b),$$
$$\text{H.F.}\{\varphi(z)F(z)\} = \varphi(x)f(x)$$

の関係を使う必要がある．(これらはそれぞれ定義3.8，定義2.7である．) ∎

§4.　Fourier 逆変換

ふつうの関数についての Fourier 逆変換の概念をそのまま超関数のばあいに適用して，つぎのように定義する．

〔**定義 2**〕　超関数 $f(x)$ およびその母関数 $F(z)$ の Fourier 変換をそれぞれ $g(\xi), G(\zeta)$ とする．このとき，$f(x)$, $F(z)$ はそれぞれ $g(\xi)$, $G(\zeta)$ の Fourier 逆変換であるといい，

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}g(\xi),\ \ F(z) = \mathcal{F}^{-1}G(\zeta) \tag{4.1}$$

のような記号で表わす．

ふつうの関数については Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ に対する具体的な演算公式 (2.2) が知られているが，これに対応するものを超関数について見出そうというのがこの節の目的である．結果はつぎの定理にまとめられる．

[**定理 8**]　任意の母関数 $F(z)$ および超関数 $f(x)$ に対して

$$\mathcal{F}\mathcal{F}F(z) = -F(-z),\quad \mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x) \tag{4.2}$$

という関係が成り立つ．したがって，$f(x) = \text{H.F.}\,F(z)$, $\mathcal{F}f(x) = g(\xi)$, $\mathcal{F}F(z) = G(\zeta)$ とすれば

$$F(z) = \mathcal{F}^{-1}G(\zeta) = -\mathcal{F}G(-\zeta), \tag{4.3}$$
$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}g(\xi) = \mathcal{F}g(-\xi) \tag{4.4}$$

である．

(証明)　$G(\zeta) = \mathcal{F}F(z)$ に Fourier 変換を施こしたもの，すなわち $H(t) = \mathcal{F}G(\zeta)$ を考える．その上成分は定義 1 により

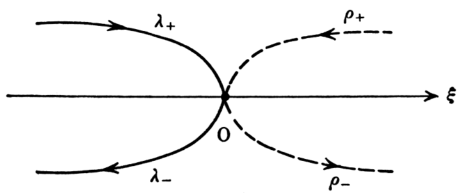


図 7

$$H_+(t)=\int_{\lambda_+}G_+(\zeta)e^{-jt\zeta}d\zeta+\int_{\lambda_-}G_-(\zeta)e^{-jt\zeta}d\zeta$$

である．ただし，λ_+,λ_- は図7に示すような，$\zeta=0$ を通りそれぞれ ζ 平面の上半平面および下半平面を走る積分路である．($\zeta=0$ で $G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ が正則，あるいは積分可能であると仮定しておく．この仮定は，下の注意で示すように，容易にとり除くことができる．)

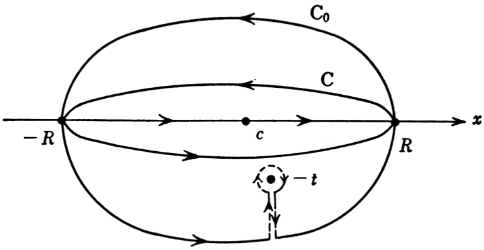


図 8

さて，定理1によって $G_+(\zeta), G_-(\zeta)$ を z 平面上での線積分で表わす(図8)．まず $H_+(t)$ の右辺の第1項は

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_+}&=\int_{\lambda_+}e^{-jt\zeta}d\zeta\int_{-R}^{c}f(x)e^{-j\zeta x}dx \quad (R\to\infty)\\ &=\int_{-R}^{c}f(x)dx\int_{\lambda_+}e^{-j(x+t)\zeta}d\zeta \qquad \text{(積分順序の変更)}\\ &=-\frac{1}{j}\int_{-R}^{c}\frac{f(x)}{x+t}dx\end{aligned}$$

となる．同様の計算で

$$\int_{\lambda_-}=-\frac{1}{j}\int_{c}^{R}\frac{f(x)}{x+t}dx$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}H_+(t)&=-\frac{1}{j}\int_{-R}^{R}\frac{f(x)}{x+t}dx=\frac{1}{j}\int_{C}\frac{F(z)}{z+t}dz \qquad \text{(超関数の積分の定義)}\\ &=\frac{1}{j}\int_{C_0}\frac{F(z)}{z+t}dz-F(-t) \qquad (4.5)\end{aligned}$$

と書き表わされる．ただし，積分路Cは x 軸に十分近く(したがって超関数 $f(x)/(x+t)$ の母関数 $F(z)/(z+t)$ の特異点が x 軸との間の領域には存在しない)，また積分路 C_0 は x 軸から十分遠く(しかし $F(z)$ の正則な領域内にある)にあるものとする．(4.5) の右辺の第2項が，積分路をCから C_0 にかえるときに現われることは明らかであろう．

$H(t)$ の下成分については 図7の積分路 ρ_+, ρ_- について上と同様の計算を行なえばよい．その結果

$$H_-(t) = \frac{1}{j}\int_{C_0} \frac{F(z)}{z+t} dz - F(-t) \tag{4.6}$$

が得られる．すなわち，形式的に $H_+(t)$ と $H_-(t)$ はまったく同じである！しかし，$H_+(t)$ は $\mathrm{Im}\, t>0$ に対するもの，$H_-(t)$ は $\mathrm{Im}\, t<0$ に対するものであることを忘れてはならない．(4.5), (4.6) をまとめて書くと

$$H(t) = \frac{1}{j}\int_{C_0} \frac{F(z)}{z+t} dz - F(-t) \tag{4.7}$$

となる．さて，右辺の第1項は t の解析関数である．すなわち，$z+t \fallingdotseq 0$ でありさえすれば，つまり $-t$ が閉曲線 C_0 の上に来ないかぎり正則である．とくに，t 平面上の実数軸の上で正則である．したがって，$H(t)$ を超関数の母関数として使用する際には，第1項を省略してもよい．こうして，(4.7) は

$$H(t) \cong -F(-t)$$

となる．同等記号 $\cong$ のかわりに簡単に等号 $=$ を用い，また変数 t を z にかえると，上の関係は

$$\mathfrak{F}G(\zeta) = -F(-z) \tag{4.8}$$

と書ける．これは (4.2) の第1式である．第2式を得るには両辺の H.F. をとればよい．(4.8) で ζ のかわりに $-\zeta$ と書くと，定理3の (3.1) の関係によって $\mathfrak{F}G(-\zeta) = -F(z)$，すなわち

$$F(z) = -\mathfrak{F}G(-\zeta) \tag{4.9}$$

が得られる．これは (4.3) にほかならない．この両辺の H.F. をとれば，ただちに (4.4) が得られる．∎

注意　以上の証明では，$\zeta=0$ で $G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ が正則，あるいは積分可能であることが仮定されている．$\zeta=0$ がたまたま $G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ の特異点であっても，ξ 軸上のどこかに正則点があれば，つぎのような方法で証明ができる．

いま，$\zeta = a$（a は実数）で $G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ は正則であるとする．$F(z)$ のかわりに

$$F_1(z) = e^{-jaz}F(z)$$

を考えると，定理6の（ii）により

$$G_1(\zeta) = \mathfrak{F}F_1(z) = G(\zeta+a)$$

である．したがって，$\zeta=0$ は $G_1(\zeta)$ の正則点になるから，上の証明が成り立ち，$F_1(z)$ については (4.8) が使える．そこで

$$\mathfrak{F}G(\zeta) = \mathfrak{F}G_1(\zeta-a) = e^{-jaz}\mathfrak{F}G_1(\zeta) = e^{-jaz}\{-F_1(-z)\} = -F(-z)$$

のような変形が許されることになる．ただし，途中で定理6の（i）を使う．けっきょく

$F(z)$ についても (4.8) が成り立つのである．

以上見て来たように，超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ はふつうの関数の Fourier 変換と形式的にまったく同じ性質をもっている．しかし，$g(\xi)$ 自身も超関数であって，ふつうの関数ではないことに注意しなければならない．そこで，ふつうの関数の Fourier 変換との対応を明らかにするために，蛇足ながらつぎの定理をつけ加えておこう．

[定理 9] 超関数 $f(x)$ の Fourier 変換について，つぎの関係が成り立つ．

$$\mathrm{O.F.}\{\mathcal{F}f(x)\}=\mathcal{F}\{\mathrm{O.F.}f(x)\}. \tag{4.10}$$

ただし，右辺が存在するものとする．

この定理の証明は実質的に定義 1 の動機づけとしてすでに与えられている．すなわち，これは定義 1 の合理性を示すものである．

最後に，定理 1 に対応して，Fourier 逆変換に対してつぎの定理が成り立つ．

[定理 10] $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$，$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ とすれば，

$$F(z)=\left[\int_{\gamma'}^{\infty}\int_{\gamma}^{-\infty}\right]g(\xi)e^{jz\xi}d\xi \tag{4.11}$$

である．ただし，$g(\xi)$ は $\xi=\gamma$ で正則あるいは積分可能とする．

（証明） $F(z)$ に対する (4.3) の表現について定理 1 を適用すればよい．∎

§5. Fourier 変換の計算例

これで Fourier 変換に関する基本的なことがらは一応片づいたので，簡単な Fourier 変換の計算を行なってみよう．

例 4 $\mathcal{F}e^{-ax^2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\xi^2/a}$，$\mathrm{Re}\,a>0$ (5.1)

これは**ふつうの関数**の Fourier 変換の例である．定理 1 の (2.9) 式で $f(x)=e^{-ax^2}$，$c=+\infty$ とおけば

$$G(\zeta)=[g(\zeta),0],\quad g(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-j\zeta x}dx$$

となる．e の肩は

$$-a\left(x^2+\frac{j\zeta}{a}x\right)=-a\left[\left(x+\frac{j\zeta}{2a}\right)^2-\left(\frac{j\zeta}{2a}\right)^2\right]$$
$$=-\frac{\pi^2\zeta^2}{a}-a\left(x+\frac{j\zeta}{2a}\right)^2$$

と書けるから，積分変数を $t=\sqrt{a}(x+j\zeta/2a)$ にかえ，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ に注意すると

$$g(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\zeta^2/a}$$

が得られる．$\mathcal{F}f(x)=\mathrm{H.F.}\,G(\zeta)=g(\xi)$ がすなわち (5.1) である．

なお，(5.1) は a が純虚数のばあいにも成り立つ．たとえば $a=-i=e^{-(\pi/2)i}$ のばあいには，$1/\sqrt{a}=e^{(\pi/4)i}=2^{-1/2}(1+i)$ であるから，(5.1) は

$$\mathcal{F}e^{ix^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)e^{-i\pi^2\xi^2} \tag{5.2}$$

となる．

(5.1) は**ふつうの関数**としては $a=0$ のばあい意味を失う．しかし**超関数**としては $a\to 0$ の極限で意味をもつ．なぜかというと，定理 4.3 の (v) によれば

$$\lim_{a\to 0}\mathcal{F}f(x,a)=\mathcal{F}\{\lim_{a\to 0}f(x,a)\} \tag{5.3}$$

であるから（$\mathcal{F}$ は定積分の1種である！），$f(x,a)=e^{-ax^2}$ とすれば右辺は $\mathcal{F}\{1\}=\delta(\xi)$ となり，

$$\delta(\xi)=\lim_{a\to 0}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\xi^2/a} \tag{5.4}$$

という $\delta(\xi)$ の表現が得られるからである．(5.4) は前に別の方法で見出した (4.3.20) と一致する．

例 5　なにか1つ Fourier 変換が計算されると，上に得られた諸定理を応用することによって種々の公式が見出されることを例示しよう．まず，(2.15) すなわち

$$\mathcal{F}H(x)=\frac{1}{2}\delta(\xi)+\frac{1}{j\xi} \tag{5.5}$$

が得られたとしよう．(3.4) によれば，ただちに

$$\mathcal{F}H(-x)=\frac{1}{2}\delta(\xi)-\frac{1}{j\xi} \tag{5.6}$$

が得られる．(5.5) に (3.15) を適用すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{F}H(x+a)&=e^{ja\xi}\left\{\frac{1}{2}\delta(\xi)+\frac{1}{j\xi}\right\}\\&=\frac{1}{2}\delta(\xi)+\frac{e^{ja\xi}}{j\xi}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

ただし，$\varphi(\xi)\delta(\xi)=\varphi(0)\delta(\xi)$ の関係を使う．(5.7) から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{H(x+a)-H(x-a)\}&=\frac{e^{ja\xi}-e^{-ja\xi}}{j\xi}\\&=\frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}\end{aligned} \tag{5.8}$$

がわかり，これの逆変換をとることによって，(4.4) により

$$\mathcal{F}\frac{\sin 2\pi ax}{\pi x}=H(\xi+a)-H(\xi-a) \tag{5.9}$$

が得られる．(ただし文字 x,ξ を入れかえて書いてある.) (5.8), (5.9) はふつうの関数としても成り立つ．

(5.5) と (5.6) の和と差を作れば

$$\mathcal{F}1=\delta(\xi), \tag{5.10}$$

$$\mathcal{F}\,\mathrm{sgn}\,x=\frac{2}{j\xi} \tag{5.11}$$

が得られる．(5.10), (5.11) の逆変換をとれば，それぞれ

$$\mathcal{F}\delta(x)=1, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{F}\frac{1}{x}=-\frac{j}{2}\,\mathrm{sgn}\,\xi \tag{5.13}$$

が得られる．(5.10), (5.11) に (3.17) を n 回適用すれば

$$\mathcal{F}x^n=(-j)^{-n}\delta^{(n)}(\xi), \tag{5.14}$$

$$\mathcal{F}\{x^n\,\mathrm{sgn}\,x\}=2\frac{n!}{(j\xi)^{n+1}} \tag{5.15}$$

が得られ，これらの逆変換として

$$\mathcal{F}\delta^{(n)}(x)=(j\xi)^n, \tag{5.16}$$

$$\mathcal{F}\frac{1}{x^{n+1}}=-\frac{j}{2}\frac{(-j\xi)^n}{n!}\,\mathrm{sgn}\,\xi \tag{5.17}$$

が得られる．これらはまた，(5.12), (5.13) に (3.18) を n 回適用することによっても得られる．

§6. ま　と　め

この章では Fourier 変換に関する基本的な事項を説明した．これによって超関数の Fourier 変換をふつうの関数のばあいと同様に行なうことができるようになった．無限積分の収束性について心配する必要がないので，むしろ超関数の方がふつうの関数よりはるかに自由に，気楽にとり扱えるのである．具体例として $\mathcal{F}e^{-ax^2}$, $\mathcal{F}x^n$, $\mathcal{F}\{x^n\,\mathrm{sgn}\,x\}$, $\mathcal{F}x^{-m}$, $\mathcal{F}H(x)$, $\mathcal{F}\delta^{(n)}(x)$ などが求められた．

6 ベキ型超関数の Fourier 変換

§1. はじめに

前章では超関数の Fourier 変換について基本的な事柄を説明した．そして，簡単な超関数について具体的に Fourier 変換を求める計算の方法を示した．この章ではベキ型の超関数 $|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x)$，$|x|^\alpha(\log|x|)^n$，$|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$（$\alpha$ は任意の複素数，n は 0 または正の整数）の Fourier 変換を求める．これらは基本的な超関数であるが，ふつうの関数としては Fourier 変換が存在しないものである．しかし，後で明らかになるように，与えられた関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ の $\xi\to\infty$ における 漸近的性質を調べようとする際に，これらベキ型の超関数は決定的な役割をもつのである．

§2. $\mathcal{F}z^\alpha$

超関数の Fourier 変換は前章で定義された．すなわち，$f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ とすると，定義5.1によれば

$$G(\zeta)=\mathcal{F}F(z)=\left[\int_l,\int_r\right]F(z)e^{-j\zeta z}dz, \tag{2.1}$$

$$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)=\text{H.F.}\,G(\zeta) \tag{2.2}$$

である．ただし，l, r は図1に示すような積分路であって，端点 $c_+(\operatorname{Im} c_+>0)$，$c_-(\operatorname{Im} c_-<0)$ は任意である．x 軸上の点 $z=c$（c は実数）で $F(z)$ が正則，あるいは積分可能のばあいには $c_+=c=c_-$ ととることもできる．このばあい l, r はそれぞれ左および右に開いたU字形の曲線になる．

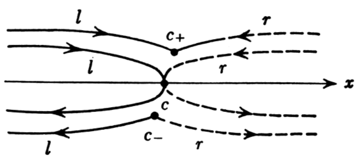


図 1

いま，母関数 $F(z)$ として

$$F(z)=z^\alpha=\exp[\alpha\operatorname{Log} z] \tag{2.3}$$

を考えよう．$\operatorname{Log} z$ は**対数関数の主値**，すなわち $-\pi<\arg z<\pi$ の条件によって $\log z$ を1価にしたものを表わす．また，α は任意の複素数とする．このよ

うに定義された z^α は，x 軸の負の部分に沿って切目を入れた z 平面で 1 価正則である．したがって，積分路 l, r を図 2 のようにU字形の曲線とすることができる．ただし $c>0$ とする．このばあい，明らかに

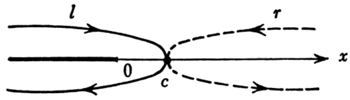


図 2　z 平面

$$G_-(\zeta) = \int_r F(z) e^{-j\zeta z} dz = 0 \tag{2.4}$$

である．（積分路の内側で被積分関数 $F(z)e^{-j\zeta z} = z^\alpha e^{-j\zeta z}$ が正則だから．）また

$$G_+(\zeta) = \int_l z^\alpha e^{-j\zeta z} dz \tag{2.5}$$

である．いま積分変数を z から

$$t = j\zeta z \tag{2.6}$$

にかえると，

$$G_+(\zeta) = (j\zeta)^{-(\alpha+1)} \int_{l'} e^{-t} t^\alpha dt \tag{2.7}$$

となる．さて

$$\arg t = \arg j + \arg \zeta + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg \zeta + \arg z$$

であるから，t 平面は z 平面を角度 $\arg \zeta + \pi/2$ だけ反時計方向に回転し，かつ大きさを $2\pi|\zeta|$ 倍に拡大したものである．したがって，t 平面は図 3 のようになる．$G_+(\zeta)$ を考えているのだから ζ は上半平面にあり，したがって $0<\arg \zeta<\pi$ であることに注意してほしい．つまり，t 平面での積分路 l' は右側に開いたU字形の曲線になっているのである．複素積分の計算でよく知られているように，この積分路 l' は図 4 の r のように，変更することができる．ただし，r をたど

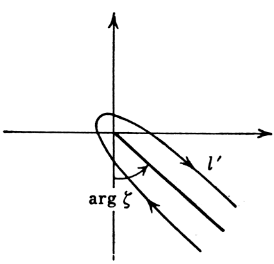


図 3　t 平面

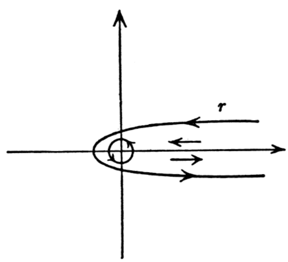


図 4

る向きを図の矢印のように決めておくと

$$\int_{l'} = -\int_{\gamma}$$

である．ところが，Γ 関数の積分表示として

$$\int_{\gamma} e^{-t} t^{\alpha} dt = 2ie^{\alpha\pi i} \sin \pi\alpha \Gamma(\alpha+1) \tag{2.8}$$

の関係が知られているから，(2.7) は

$$G_+(\zeta) = -2ie^{\alpha\pi i} \sin \pi\alpha\Gamma(\alpha+1)(j\zeta)^{-(\alpha+1)}$$

となり，(2.4) とあわせて，けっきょく

$$\mathcal{F}z^\alpha = 2i \sin \pi\alpha\Gamma(\alpha+1)[(\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}, 0], \tag{2.9}$$
$$\bar{j} = je^{-\pi i} = 2\pi e^{-(\pi/2)i}$$

が得られる．

(2.9) の右辺は，上成分と下成分が別々の関数として表わされている．しかし，これらを同一の関数で表わすこともできるのである．そのためには，一般に

$$[z^\alpha, 0] = \frac{(e^{\pi i}z)^\alpha - (-z)^\alpha}{2i \sin \pi\alpha} \tag{2.10}$$

の関係があることに注意すればよい．(この証明は下の注意で与える.) (2.10) を使うと，簡単な計算によって (2.9) は

$$\mathcal{F}z^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\{(j\zeta)^{-(\alpha+1)} - (-\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}\} \tag{2.11}$$

のように書きかえられる．

定理 5.3 により，$\mathcal{F}F(z) = G(\zeta)$ のとき $\mathcal{F}F(-z) = G(-\zeta)$ であるから，(2.11) からただちに

$$\mathcal{F}(-z)^\alpha = \Gamma(\alpha+1)\{(-j\zeta)^{-(\alpha+1)} - (\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}\} \tag{2.12}$$

が得られる．(2.10) の Fourier 変換をとり，(2.11), (2.12) を使えば

$$\mathcal{F}[z^\alpha, 0] = -\Gamma(\alpha+1)(-\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)} \tag{2.13}$$

が導かれる．この結果はまた，(2.9) の Fourier 逆変換をとり $\alpha+1$ を $-\alpha$ におきかえることによっても得られる．

(2.11) から (2.13) を引けば，$z^\alpha = [z^\alpha, z^\alpha]$ を考慮して

$$\mathcal{F}[0, z^\alpha] = \Gamma(\alpha+1)(j\zeta)^{-(\alpha+1)} \tag{2.14}$$

が得られる．定理 5.3 により，$\mathcal{F}F(z) = G(\zeta)$ のとき $\mathcal{F}F(-z) = G(-\zeta)$, $\mathcal{F}\bar{F}(z) = -\bar{G}(-\zeta)$ であることを思い出せば，(2.13) から直接 (2.14) を導くことも容易である．

注意　われわれは母関数 $F(z)=z^{\alpha}=\exp[\alpha\,\mathrm{Log}\,z]$ を考えている．これに対して，もちろん，$F(-z)=(-z)^{\alpha}=\exp[\alpha\,\mathrm{Log}\,(-z)]$，$\bar{F}(z)=z\ =\exp[\bar{\alpha}\,\mathrm{Log}\,z]$ である．$F(z)$ と $\bar{F}(z)$ は x 軸の負の部分に沿って切目を入れた z 平面で1価正則であるのに対して，$F(-z)$ は x 軸の正の部分に切目を入れた z 平面で1価正則である．

さて，$\mathrm{Log}\,z$ の引数 z の偏角には $-\pi<\arg z<\pi$ という条件がついている．したがって，$\mathrm{Log}(-z)$ については

$$-z=\begin{cases}e^{-\pi i}z, & \mathrm{Im}\,z>0\\ e^{\pi i}z, & \mathrm{Im}\,z<0\end{cases}\tag{2.15}$$

と考えなければならない．したがって

$$(-z)^{\alpha}=[e^{-\alpha\pi i},e^{\alpha\pi i}]z^{\alpha}$$
$$=\{e^{-\alpha\pi i}1_{+}(z)-e^{\alpha\pi i}1_{-}(z)\}z^{\alpha}\tag{2.16}$$

である．ところが

$$1_{-}(z)=1_{+}(z)-1\tag{2.17}$$

であるから，これを (2.16) に代入して $z^{\alpha}1_{+}(z)$ についてとくと，

$$z^{\alpha}1_{+}(z)=\frac{(e^{\pi i}z)^{\alpha}-(-z)^{\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\tag{2.18}$$

が得られる．これは (2.10) にほかならない．

なお，(2.11) の右辺に現われる $(-\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}$ は関数 $(-\zeta)^{-(\alpha+1)}$ に係数 $\bar{j}^{-(\alpha+1)}=(je^{-\pi i})^{-(\alpha+1)}$ がかかったものと解釈しなければならない．$-\bar{j}=j$ ではあるが，$(-\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}$ は $(j\zeta)^{-(\alpha+1)}$ ではないのである．(α が整数のばあいには両者はもちろん等しい．)

§3.　$\mathfrak{F}|x|^{\alpha}H(x)$，$\mathfrak{F}|x|^{\alpha}$，$\mathfrak{F}|x|^{\alpha}\,\mathrm{sgn}\,x$

超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)$ は，母関数 $F(z)$ の Fourier 変換 $G(\zeta)$ がわかれば $g(\xi)=\mathrm{H.F.}\,G(\zeta)$ としてただちに求められる．さて，定義 3.12 により

$$\mathrm{H.F.}(-z)^{\alpha}=-2i\sin\pi\alpha|x|^{\alpha}H(x)\tag{3.1}$$

である．ところが，(2.12) によって

$$\mathfrak{F}(-z)^{\alpha}=\Gamma(\alpha+1)\{(-j\zeta)^{-(\alpha+1)}-(\bar{j}\zeta)^{-(\alpha+1)}\}\tag{3.2}$$

であるから，両辺の H.F. をとり，(3.1) を考慮すると，簡単な計算の後

$$\mathfrak{F}|x|^{\alpha}H(x)=\Gamma(\alpha+1)\{j^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-(\alpha+1)}H(\xi)+\bar{j}^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-(\alpha+1)}H(-\xi)\}$$
$$=\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}(\alpha+1)i\,\mathrm{sgn}\,\xi\right\}\tag{3.3}$$

が得られる．

つぎに

$$\left.\begin{array}{r}|x|^{\alpha}\\ |x|^{\alpha}\,\mathrm{sgn}\,x\end{array}\right\}\overset{\mathrm{def}}{=}|x|^{\alpha}H(x)\pm|x|^{\alpha}H(-x)\tag{3.4}$$

の定義式を思い出すと，(3.3) からただちに

$$\mathcal{F}|x|^\alpha = 2\cos\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{F}|x|^\alpha \operatorname{sgn} x = -2i\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)} \operatorname{sgn}\xi \tag{3.6}$$

が導かれる．

以上の結果は α が非整数のばあいについて成り立つものである．α が整数のばあいには，別のとり扱いが必要である．

注意 (3.3) の表現は説明を要する．実は，表式を簡単にするために

$$|x|^\alpha e^{i\beta \operatorname{sgn} x} \overset{\text{def}}{=} e^{i\beta}|x|^\alpha H(x) + e^{-i\beta}|x|^\alpha H(-x) \tag{3.7}$$

で定義される‘新しい’超関数 $|x|^\alpha e^{i\beta \operatorname{sgn} x}$ を導入したのである．‘新しい’といっても本質的には新しいわけではなくて，既知の超関数 $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha H(-x)$ の線形結合に過ぎない．$e^{i\beta \operatorname{sgn} x} = e^{i\beta}(x>0)$, $e^{-i\beta}(x<0)$ であるから，

$$e^{i\beta \operatorname{sgn} x} = e^{i\beta}H(x) + e^{-i\beta}H(-x) \tag{3.8}$$

である．したがって，ふつうの関数としては (3.7) はそのまま成り立つので，超関数 $|x|^\alpha e^{i\beta \operatorname{sgn} x}$ を (3.7) の定義によって導入するのは合理的である．

§4. $\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x)$, $\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n$, $\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$

定義 4.3 によれば

$$|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n |x|^\alpha H(x), \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}|x|^\alpha(\log|x|)^n \\ |x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x\end{array}\right\} = |x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) \pm |x|^\alpha(\log|x|)^n H(-x) \tag{4.2}$$

である．一方，定理 4.4 の (v) によれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \mathcal{F} f(x,\alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n f(x,\alpha) \tag{4.3}$$

が成り立つ．したがって，$f(x,\alpha) = |x|^\alpha H(x)$ ととれば

$$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \mathcal{F}|x|^\alpha H(x) \tag{4.4}$$

である．$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x)$ はすでに (3.3) として見出されているから，あとは単に α について微分するだけである．しかしこの微分計算を組織的に実行するには，つぎのようにするのが便利だろう．

いま，$g=e^Q$ とおくと

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial\alpha}&=\frac{\partial Q}{\partial\alpha}e^Q,\\ \frac{\partial^2 g}{\partial\alpha^2}&=\left\{\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}+\left(\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right)^2\right\}e^Q,\\ \frac{\partial^3 g}{\partial\alpha^3}&=\left\{\frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^3}+3\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}\frac{\partial Q}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial Q}{\partial\alpha}\right)^3\right\}e^Q,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

となる．そこで，g として (3.3) をとると

$$Q=\log\Gamma(\alpha+1)-(\alpha+1)\left\{\log|2\pi\xi|+\frac{\pi}{2}i\,\mathrm{sgn}\,\xi\right\}\tag{4.6}$$

である．これから

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha}=\psi(\alpha+1)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\,\mathrm{sgn}\,\xi,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}=\psi'(\alpha+1),\quad \frac{\partial^3 Q}{\partial\alpha^3}=\psi''(\alpha+1)$$

が得られる．ただし

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\tag{4.7}$$

は **2 ガンマ (digamma) 関数**とよばれるものであって，すでに例 4.12 で使われている．これらの結果を (4.5) に代入すると，(4.4) は，$n=1,2,3$ に対してそれぞれ

$$\mathfrak{F}|x|^\alpha\log|x|H(x)=k(\xi,\alpha+1)\mathfrak{F}|x|^\alpha H(x),\tag{4.8}$$

$$\mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^2H(x)=\{k^2(\xi,\alpha+1)+\psi'(\alpha+1)\}\mathfrak{F}|x|^\alpha H(x),\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^3H(x)=\{&k^3(\xi,\alpha+1)+3\psi'(\alpha+1)k(\xi,\alpha+1)\\&+\psi''(\alpha+1)\}\mathfrak{F}|x|^\alpha H(x)\end{aligned}\tag{4.10}$$

を与える．ただし，簡単のために

$$k(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\,\mathrm{sgn}\,\xi\tag{4.11}$$

と書いてある．

$\mathfrak{F}f(x)=g(\xi)$ のとき $\mathfrak{F}f(-x)=g(-\xi)$ であることを思い出すと，(4.8) から

$$\mathfrak{F}|x|^\alpha\log|x|H(-x)=k(-\xi,\alpha+1)\mathfrak{F}|x|^\alpha H(-x)\tag{4.12}$$

が得られる．一般に $\mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^nH(-x)$ についても同様である．さらに，これらと $\mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^nH(x)$ との和と差をつくれば，

$$\mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n,\quad \mathfrak{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n\,\mathrm{sgn}\,x$$

が得られる．しかし，計算の簡便さからいうと，むしろ

$$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \mathcal{F}|x|^\alpha, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \mathcal{F}|x|^\alpha \operatorname{sgn} x \tag{4.14}$$

の関係を使う方がよい．すなわち，(3.5)，(3.6) の右辺を e^Q の形に書き表わし，(4.5) を利用するのである．こうして，

$$\mathcal{F}|x|^\alpha \log|x| = k_1(\xi, \alpha+1)\mathcal{F}|x|^\alpha, \tag{4.15}$$

$$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^2 = \left\{k_1^2(\xi, \alpha+1) + \frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi, \alpha+1)\right\}\mathcal{F}|x|^\alpha, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^3 = \left\{k_1^3(\xi, \alpha+1) + 3\frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi, \alpha+1)\cdot k_1(\xi, \alpha+1) + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_1(\xi, \alpha+1)\right\}\mathcal{F}|x|^\alpha \tag{4.17}$$

が得られる．ただし

$$k_1(\xi, \alpha) = \psi(\alpha) - \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{2}\alpha - \log|2\pi\xi|, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}k_1(\xi, \alpha) = \psi'(\alpha) - \frac{\pi^2}{4}\sec^2\frac{\pi}{2}\alpha, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_1(\xi, \alpha) = \psi''(\alpha) - \frac{\pi^3}{4}\sec^2\frac{\pi}{2}\alpha\tan\frac{\pi}{2}\alpha \tag{4.20}$$

である．また，$\mathcal{F}|x|^\alpha(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$ に対する公式は上と同じ形で，$k_1(\xi, \alpha)$ をつぎの $k_2(\xi, \alpha)$ でおきかえたものである．

$$k_2(\xi, \alpha) = \psi(\alpha) + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}\alpha - \log|2\pi\xi|, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}k_2(\xi, \alpha) = \psi'(\alpha) - \frac{\pi^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}\alpha, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}k_2(\xi, \alpha) = \psi''(\alpha) + \frac{\pi^3}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}\alpha\cot\frac{\pi}{2}\alpha. \tag{4.23}$$

§5. $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^n H(x)$, $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^n$, $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$

整数ベキのベキ型超関数の Fourier 変換を求めるには，整数ベキと非整数ベキを結びつける関係，すなわち定理 4.14 を応用するのがもっとも便利である．(4.8.16) で $\alpha = p$ $(p = 0, 1, 2, \cdots)$ とおけば右辺の第 2 項は消えるから

$$|x|^p e^{\varepsilon\log|x|}H(x) = |x|^{p+\varepsilon}H(x) \tag{5.1}$$

となる．両辺の Fourier 変換をとれば，(3.3) により

$$\mathcal{F}|x|^p e^{\varepsilon\log|x|}H(x) = \mathcal{F}|x|^{p+\varepsilon}H(x)$$
$$= \Gamma(p+1+\varepsilon)\{j^{-(p+1+\varepsilon)}|\xi|^{-(p+1+\varepsilon)}H(\xi)$$
$$+\bar{j}^{-(p+1+\varepsilon)}|\xi|^{-(p+1+\varepsilon)}H(-\xi)\}$$

が得られる．ここで (4.8.16) をふたたび応用すれば，右辺はつぎのように変形できる．まず，(4.8.16) の m, ε を $m\to p+1$, $\varepsilon\to -\varepsilon$ のようにおきかえれば

$$|\xi|^{-(p+1+\varepsilon)}H(\xi) = |\xi|^{-(p+1)}e^{-\varepsilon\log|\xi|}H(\xi) + \frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-1)^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\delta^{(p)}(\xi)$$

が得られ，この ξ を $-\xi$ におきかえれば

$$|\xi|^{-(p+1+\varepsilon)}H(-\xi) = |\xi|^{-(p+1)}e^{-\varepsilon\log|\xi|}H(-\xi) - \frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{1}{\Gamma(p+1)}\delta^{(p)}(\xi)$$

が得られる．これらを上の式の右辺に代入して整理すると，$|x|^pH(x) = x^pH(x)$ に注意して，

$$\mathcal{F}x^p e^{\varepsilon\log|x|}H(x) = \frac{\Gamma(p+1+\varepsilon)}{\Gamma(p+1)}\left\{\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}e^{-\varepsilon\{\log|2\pi\xi|+(\pi/2)i\,\mathrm{sgn}\,\xi\}}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\varepsilon\log 2\pi}}{2(-j)^p\cos(\pi\varepsilon/2)}\delta^{(p)}(\xi)\right\} \tag{5.2}$$

($p = 0, 1, 2, \cdots$) が得られる．この両辺を ε のベキに展開して ε^n の項を比較すれば $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^nH(x)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) が見出されるのである．たとえば

$$\mathcal{F}x^pH(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}} + \frac{1}{2}\frac{\delta^{(p)}(\xi)}{(-j)^p}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{F}x^p\log|x|H(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}k(\xi, p+1) + \frac{1}{2}\frac{k_0}{(-j)^p}\delta^{(p)}(\xi), \tag{5.4}$$

$$\mathcal{F}x^p(\log|x|)^2H(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}\{[k(\xi, p+1)]^2 + \psi'(p+1)\}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\delta^{(p)}(\xi)}{(-j)^p}\left\{k_0^2 + \psi'(p+1) + \frac{\pi^2}{4}\right\}, \tag{5.5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

である．ただし，簡単のために

$$k(\xi, p+1) = \psi(p+1) - \log|2\pi\xi| - \frac{\pi}{2}i\,\mathrm{sgn}\,\xi, \tag{5.6}$$

$$k_0 = \psi(p+1) - \log 2\pi \tag{5.7}$$

とおいてある．この $k(\xi, p+1)$ は (4.11) の $k(\xi, \alpha)$ で $\alpha = p+1$ としたものである．

つぎに，$\mathcal{F}f(x) = g(\xi)$ のとき $\mathcal{F}f(-x) = g(-\xi)$ であることに注意すれば，(5.2) から

$$\mathcal{F}x^p e^{\varepsilon\log|x|}H(-x) = \frac{\Gamma(p+1+\varepsilon)}{\Gamma(p+1)}\left\{-\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}e^{-\varepsilon\{\log|2\pi\xi|-(\pi/2)i\operatorname{sgn}\xi\}}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\varepsilon\log 2\pi}}{2(-j)^p\cos(\pi\varepsilon/2)}\delta^{(p)}(\xi)\right\} \quad (5.8)$$

が得られる．(5.2) と (5.8) の和と差をつくれば

$$\mathcal{F}x^p e^{\varepsilon\log|x|} = \frac{\Gamma(p+1+\varepsilon)}{\Gamma(p+1)}\left\{-2i\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}e^{-\varepsilon\log|2\pi\xi|}\operatorname{sgn}\xi\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\varepsilon\log 2\pi}}{(-j)^p\cos(\pi\varepsilon/2)}\delta^{(p)}(\xi)\right\}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{F}x^p e^{\varepsilon\log|x|}\operatorname{sgn} x = 2\cos\frac{\pi}{2}\varepsilon\frac{\Gamma(p+1+\varepsilon)}{(j\xi)^{p+1}}e^{-\varepsilon\log|2\pi\xi|} \quad (5.10)$$

が得られる．これらの両辺を ε のベキに展開して ε^n の項を比較すれば $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^n$, $\mathcal{F}x^p(\log|x|)^n\operatorname{sgn} x$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が見出される．たとえば

$$\mathcal{F}x^p = \frac{\delta^{(p)}(\xi)}{(-j)^p}, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{F}x^p\log|x| = k_0\frac{\delta^{(p)}(\xi)}{(-j)^p} - \pi i\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}\operatorname{sgn}\xi, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{F}x^p(\log|x|)^2 = \left\{k_0^2+\psi(p+1)+\frac{\pi^2}{4}\right\}\frac{\delta^{(p)}(\xi)}{(-j)^p}$$
$$-2\pi i\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}k_r(\xi,p+1)\operatorname{sgn}\xi, \quad (5.13)$$

....

$$\mathcal{F}x^p\operatorname{sgn} x = 2\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{F}x^p\log|x|\operatorname{sgn} x = 2\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}k_r(\xi,p+1), \quad (5.15)$$

$$\mathcal{F}x^p(\log|x|)^2\operatorname{sgn} x = 2\frac{\Gamma(p+1)}{(j\xi)^{p+1}}\left\{[k_r(\xi,p+1)]^2+\psi'(p+1)-\frac{\pi^2}{4}\right\}, \quad (5.16)$$

....

である．ただし

$$k_r(\xi,p+1) = \psi(p+1)-\log|2\pi\xi| \quad (5.17)$$

とおいてある．

§6. $\mathfrak{F}x^{-m}(\log(|x|)^n H(x)$, $\mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^n$, $\mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^n \operatorname{sgn} x$

負の整数ベキのベキ型超関数の Fourier 変換を求めるには，上とまったく同じ方針で進めばよい．（演習問題として読者におすすめしたい．）しかし，ここでは，上の結果に Fourier 逆変換を適用することによってただちに結果が得られることを示そう．

(5.10) で $\varepsilon\to-\varepsilon$, $p+1\to m$, $\xi\to x$, $x\to\xi$ とおきかえると

$$x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|} = \frac{j^m}{2\cos(\pi\varepsilon/2)\Gamma(m-\varepsilon)}\mathfrak{F}\,\xi^{m-1}e^{-\varepsilon\log|2\pi\xi|}\operatorname{sgn}\xi$$

となる．両辺の $\mathfrak{F}$ をとり，$\mathfrak{F}\mathfrak{F}f(\xi)=f(-\xi)$ の関係を想い起こすと，

$$\mathfrak{F}x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|} = -\pi i\frac{(-j\xi)^{m-1}e^{-\varepsilon\log|2\pi\xi|}\operatorname{sgn}\xi}{\cos(\pi\varepsilon/2)\Gamma(m-\varepsilon)}, \quad (m=1,2,\cdots) \tag{6.1}$$

が得られる．同様に，(5.8) の $\mathfrak{F}$ をとれば，$\mathfrak{F}\delta^{(p)}(x)=(j\xi)^p$ に注意して，

$$\mathfrak{F}x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}\operatorname{sgn}x = \frac{2\pi}{\Gamma(m)}(-j\xi)^{m-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\,e^{-\varepsilon\log|2\pi\xi|}}{2\sin(\pi\varepsilon/2)\Gamma(m-\varepsilon)}-\frac{1}{\sin\pi\varepsilon}\right\} \tag{6.2}$$

が得られる．

さらに，(6.1) と (6.2) を加えて 2 で割れば

$$\mathfrak{F}x^{-m}e^{\varepsilon\log|x|}H(x) = \frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\left\{\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\varepsilon)}e^{-\varepsilon\{\log|2\pi\xi|+(\pi/2)i\operatorname{sgn}\xi\}}-1\right\} \tag{6.3}$$

が得られる．

(6.1), (6.2), (6.3) を ε のベキに展開して ε^n の項を比較すれば，

$$\mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^n, \quad \mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^n\operatorname{sgn}x, \quad \mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^n H(x)$$

$(n=0,1,2,\cdots)$ が見出される．たとえば

$$\mathfrak{F}x^{-m} = -\pi i\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\operatorname{sgn}\xi, \tag{6.4}$$

$$\mathfrak{F}x^{-m}\log|x| = -\pi i\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\operatorname{sgn}\xi\,k_r(\xi,m), \tag{6.5}$$

$$\mathfrak{F}x^{-m}(\log|x|)^2 = -\pi i\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\operatorname{sgn}\xi\left\{[k_r(\xi,m)]^2-\psi'(m)+\frac{\pi^2}{4}\right\}, \tag{6.6}$$

…………

$$\mathfrak{F}x^{-m}\operatorname{sgn}x = 2\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}k_r(\xi,m), \tag{6.7}$$

$$\mathcal{F}x^{-m}\log|x|\operatorname{sgn}x=\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\left\{[k_r(\xi,m)]^2-\psi'(m)-\frac{\pi^2}{4}\right\}, \tag{6.8}$$

$$\mathcal{F}x^{-m}(\log|x|)^2\operatorname{sgn}x=\frac{2}{3}\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\Big\{[k_r(\xi,m)]^3$$
$$-3[\psi'(m)-\pi^2/2]k_r(\xi,m)+\psi''(m)\Big\}, \tag{6.9}$$

…………

$$\mathcal{F}x^{-m}H(x)=\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}k(\xi,m), \tag{6.10}$$

$$\mathcal{F}x^{-m}\log|x|H(x)=\frac{1}{2}\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\{[k(\xi,m)]^2-\psi'(m)\}, \tag{6.11}$$

$$\mathcal{F}x^{-m}(\log|x|)^2H(x)=\frac{1}{3}\frac{(-j\xi)^{m-1}}{\Gamma(m)}\Big\{[k(\xi,m)]^3$$
$$-3[\psi'(m)-\pi^2/3]k(\xi,m)+\psi''(m)\Big\}, \tag{6.12}$$

…………

である．ただし，$k_r(\xi,m)$, $k(\xi,m)$ はそれぞれ (5.17)，(5.6) で定義される関数である．

§7.　ベキ型超関数の Fourier 変換の表

ベキ数 α が整数 および 非整数の すべての ばあいに ついて ベキ型超関数の Fourier 変換が見出された．参照の便宜を考えてこれを巻末の付録 I に表の形にまとめておく．表の中で，α は非整数の任意の複素数，m, n は整数で $m>0$, $n\geqq 0$ とする．表は，左上隅の関数 ($|x|^\alpha$, x^n, x^{-m}) と左第 1 列の関数 (1, $\log|x|$, …) と第 1 行の 関数 (1, $\operatorname{sgn} x$, $H(x)$) の 3 つの 積の形の 超関数の Fourier 変換が，該当欄の関数とその列の第 2 行目にある関数との積の形の超関数であることを示している．

$$\mathcal{F}x^n\log|x|,\quad \mathcal{F}x^n\log|x|H(x)$$

などでは 2 つの項の和として表わされる．たとえば

$$\mathcal{F}x^n\log|x|=\{\psi(n+1)-\log 2\pi\}\frac{\delta^{(n)}(\xi)}{(-j)^n}-\pi i\frac{n!}{(j\xi)^{n+1}}\operatorname{sgn}\xi$$

である．

なお，$k^2(\xi,\alpha)$, $k^3(\xi,\alpha)$ のように一見超関数の 2 乗，3 乗のような表現があるので，読者には奇異に感じられるかも知れない．しかし，これらは $k(\xi,\alpha)=\psi(\alpha)-\log|2\pi\xi|-(\pi/2)i\operatorname{sgn}\xi$ を ふ つ う の関数 と し て 扱 い，$(\operatorname{sgn}\xi)^2=1$,

$(\mathrm{sgn}\,\xi)^3 = \mathrm{sgn}\,\xi$ の関係で整理すれば，求める Fourier 変換はけっきょく既知の超関数 $|\xi|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,\xi$, $|\xi|^\alpha$ の線形結合として表わされるのである．(§3 の注意を参照.)

ここで，Lighthill の著書に与えられている Fourier 変換の表との異同について一言しよう．Lighthill の表では $(\log|x|)^n$ の $n=0,1$ のばあいしか与えられていない．また，超関数 $x^{-m}(\log|x|)^n\,\mathrm{sgn}\,x$ の定義に不定性があるために，かれの表には不定定数 C が現われている．本書の表ではそのような不定性はない．

§8. 多ガンマ関数

最後に，$\psi(z) = (d/dz)\log\Gamma(z)$ について補足説明する．$\psi(z)$ を **2 ガンマ関数**とよぶのに対して，$\psi'(z), \psi''(z), \cdots$ をそれぞれ **3 ガンマ** (trigamma)，**4 ガンマ** (tetragamma)，一般に**多ガンマ** (polygamma) **関数**とよぶことがある．そして $z \neq -1, -2, \cdots$ に対して

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}, \tag{8.1}$$

$$\psi'(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \tag{8.2}$$

のような展開式が成り立つ．これらから，正の整数 m, n に対して

$$\psi(m) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1}, \tag{8.3}$$

$$\psi^{(n)}(m) = (-1)^n n! \left\{ -\zeta(n+1) + 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^{n+1}} \right\} \tag{8.4}$$

が導かれる．ただし

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{8.5}$$

は **Riemann のゼータ関数** (Riemann zeta function) であって，

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1.20205\cdots, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots$$

である．また

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \tag{8.6}$$

$$\psi(1-z) = \psi(z) + \pi\cot\pi z \tag{8.7}$$

が成り立つ．(8.7) を使えば，$z<1/2$ に対する $\psi(z)$ は，$z>1/2$ のばあいに帰着する．

§9. 応　用　例

ベキ型超関数の Fourier 変換の応用例として，定積分の計算を行なってみよう．

例 1　$p>0,\ a>0$ とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos(\pi p/2)}, & p\neq \text{奇数}\\ \dfrac{(-1)^{(p-1)/2}a^{p-1}}{(p-1)!}\{\psi(p)-\log a\}, & p=\text{奇数}\end{cases} \tag{9.1}$$

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin(\pi p/2)}, & p\neq \text{偶数}\\ -\dfrac{(-1)^{p/2}a^{p-1}}{(p-1)!}\{\psi(p)-\log a\}, & p=\text{偶数}\end{cases} \tag{9.2}$$

例 2　$p>0, a>0$ とする．このとき

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^p}\log x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos(\pi p/2)}\left[\{\psi(p)-\log a\}-\dfrac{\pi}{2}\tan\dfrac{\pi}{2}p\right], & p\neq \text{奇数}\\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(-1)^{(p-1)/2}a^{p-1}}{(p-1)!}\left[\{\psi(p)-\log a\}^2-\left\{\psi'(p)+\dfrac{\pi^2}{4}\right\}\right], & p=\text{奇数}\end{cases} \tag{9.3}$$

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^p}\log x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin(\pi p/2)}\left[\{\psi(p)-\log a\}+\dfrac{\pi}{2}\cot\dfrac{\pi}{2}p\right], & p\neq \text{偶数}\\ -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(-1)^{p/2}a^{p-1}}{(p-1)!}\left[\{\psi(p)-\log a\}^2-\left\{\psi'(p)+\dfrac{\pi^2}{4}\right\}\right], & p=\text{偶数}\end{cases} \tag{9.4}$$

まず例1を考えよう．発散積分の有限部分については §4.9 で説明した．それによると

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty e^{iax}x^{-p}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{iax}|x|^{-p}H(x)dx$$
$$=g(-a/2\pi).$$

ただし，$g(\xi)=\mathcal{F}|x|^{-p}H(x)$ である．Fourier 変換の表によれば，p が非整数のばあい

$$g(\xi)=\Gamma(1-p)|2\pi\xi|^{p-1}\exp[(\pi/2)(p-1)i\,\mathrm{sgn}\,\xi].$$

$$\therefore\quad g(-a/2\pi)=\Gamma(1-p)a^{p-1}e^{-i\pi(p-1)/2}$$
$$=\frac{\pi a^{p-1}}{\Gamma(p)\sin\pi p}ie^{-i\pi p/2}.$$

これを実数部と虚数部に分けると，(9.1)，(9.2) で p が非整数の ばあいの式が得られる．p が整数のばあいには，

$$g(\xi)=\frac{(-j\xi)^{p-1}}{(p-1)!}k(\xi,p)$$
$$=\frac{(-j\xi)^{p-1}}{(p-1)!}\left\{\psi(p)-\log|2\pi\xi|-\frac{\pi}{2}i\operatorname{sgn}\xi\right\}.$$
$$\therefore\quad g\left(-\frac{a}{2\pi}\right)=\frac{(ia)^{p-1}}{(p-1)!}\left\{\psi(p)-\log a+\frac{\pi}{2}i\right\}.$$

これを実数部と虚数部に分けると，(9.1)，(9.2) で p が整数のばあいの式が得られる．ここで注目すべきことは，非整数のばあいに求めた公式が，(9.1) では p が偶数のばあいに，また (9.2) では p が奇数のばあいに，そのまま成り立つことである．

例2の証明も同様に行なうことができる．読者にまかせる．

例 3　n は0または正の整数，$p>1$ とすれば

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty\frac{(\log x)^n}{x^p}dx=0 \tag{9.5}$$

が成り立つ．

この結果は，(4.10.15) で $a\to\infty$ とすればただちに得られる．

例1～例3の結果を使えば，つぎの定積分の計算はきわめて簡単になる．読者の演習問題とする．(ほかの方法を使うとするとどうすればよいか，考えてみるのもおもしろいだろう．)

例 4　$a>0$, $b>0$ とする．

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin^3x}{x^2}dx=\frac{3}{4}\log 3,$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin^3x}{x^3}dx=\frac{3}{8}\pi,$$
$$\int_{-\infty}^\infty\sin x^2\,dx=\int_{-\infty}^\infty\cos x^2dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^{1/2}}\,dx=\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^{1/2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
$$\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\log\frac{b}{a},$$
$$\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a),$$
$$\int_0^\infty\sin ax\cos bx\log x\frac{dx}{x}=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\log(a^2-b^2)+\gamma\right\}, & a>b\\[2ex] \dfrac{\pi}{4}\log\dfrac{b-a}{b+a}, & a<b\end{cases}$$

ヒント　たとえば

$$\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\mathrm{pf}\int_0^\infty\frac{\cos ax}{x}dx-\mathrm{pf}\int_0^\infty\frac{\cos bx}{x}dx$$
$$=\{\psi(1)-\log a\}-\{\psi(1)-\log b\}=\log(b/a).$$

§10. ま　と　め

ベキ型超関数の Fourier 変換を求めた．これによって，基本的な超関数に関する知識がすべて出そろったことになる．与えられた超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ について $\xi\to\infty$ での漸近的性質を調べようとするときに，ベキ型の超関数は重要な役割を演ずるのであるが，これについては第 8 章で議論する．

7　上(下)型超関数

§1.　は　じ　め　に

前章までで，超関数について一般的に成り立つ基本的な事柄を一応説明した．つぎにわれわれのなすべきことは，超関数になんらかの条件をつけたとき，どのような性質をもつかを調べることである．そこで，この章では，左(右)超関数，上(下)型超関数，上(下)超関数という概念を導入して，それらの超関数がFourier 変換に際して好ましい性質をもつことを示そう．この性質は，実際われわれが超関数の計算をするばあいに，大いに役立つのである．

§2.　左(右)超関数と上(下)型超関数

まず，定義を与える．

〔**定義 1**〕　ある適当な実数 k をとるとき，$x>k$ $(x<k)$ に対して $f(x)=0$ であるような超関数を**左(右)超関数**という．また，左かつ右の超関数を**中央超関数**という．

たとえば，$H(x-a)$ は右超関数，$H(a-x)$ は左超関数である．$\delta(x)$ および $H(x;a,b)=H(x-a)-H(x-b)$ は中央超関数である．

〔**定義 2**〕　母関数の下(上)成分が0のとき，超関数は**上(下)型**であるという．すなわち，母関数を $F(z)=[F_+(z),\ F_-(z)]$ とするとき，$F_-(z)=0$ ならば超関数は上型，$F_+(z)=0$ ならば下型である．そして，さらに $F_+(z)$ あるいは $F_-(z)$ がそれぞれ上半平面あるいは下半平面で正則であるとき，超関数は**上超関数**あるいは**下超関数**であるという．

解析関数 $\varphi(z)$ が x 軸上で正則であるとすれば，定義2.9により，$\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}(z)\}$ としてただちに超関数 $\varphi(x)$ が得られることをわれわれは知っている．さて，$\varphi(z)$ が x 軸上に特異点をもつばあいについても，$\varphi(z)$ に密接な関連のある超関数をつぎの定義によって導入しよう．

〔**定義 3**〕 $0<\mathrm{Im}\,z<A_+$ $(0>\mathrm{Im}\,z>A_-)$ で正則な解析関数 $\varphi(z)$ に対して，超関数 $[\varphi(x)]_+$ $([\varphi(x)]_-)$ を

$$[\varphi(x)]_\pm \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}_\pm(z)\} \tag{2.1}$$

で定義する．また，$A_-<\mathrm{Im}\,z<A_+$ で正則な解析関数 $\varphi(z)$ に対して，超関数 $\varphi(x+c)$ を

$$\varphi(x+c) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{H.F.}\{\varphi(z+c)\mathbf{1}(z)\}, \quad A_-<\mathrm{Im}\,c<A_+ \tag{2.2}$$

で定義する．超関数 $[\varphi(x)]_\pm$ の引数を明示する必要のあるばあいには，$[\varphi(x)]_\pm(x)$ のように表わす．

注意 $[\varphi(x)]_\pm$ に対して，つぎのような記号を使うとばあいによって便利なことがある．

$$\varphi(x\pm i0) \equiv [\varphi(x)]_\pm. \tag{2.3}$$

ただし，$\varphi(x\pm i0)$ はあくまで超関数であって，引数が $x\pm i0$ の解析関数と考えてはいけない．この記号を使うと

$$[\varphi(x)]_\pm(-x) = \varphi(-x\pm i0) \tag{2.4}$$

と書ける．また

$$[\varphi(-x)]_\pm = \varphi\{-(x\pm i0)\} \tag{2.5}$$

である．

$\varphi(x\pm i0)$ という記号はふつうよく使われているようであるが，本書では，"解析関数 $\varphi(z)$ に対応する超関数" であることを明示するために，もっぱら $[\varphi(x)]_\pm$ を使うことにする．

$[\varphi(x)]_+, [\varphi(x)]_-$ がそれぞれ上型および下型の超関数であることはいうまでもなかろう．(2.2) で $\varphi(z+c)$ は x 軸上で正則な z の解析関数であるから，$\varphi(x+c)$ は 'x の超関数' として正則，すなわち特異点をもたない．$\varphi(x+c)$ は見掛け上は $x+c$ を引数とするようであるが，本質的には x を引数とする超関数と考えなければならない．超関数の引数は本来実数であるべきだからである．任意の超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ のばあいと比較すると，ここで考える上型および下型の超関数 $[\varphi(x)]_+, [\varphi(x)]_-$ のばあいには，母関数に現われる $\varphi(z)$ の関数記号がそのまま超関数の関数記号（？）として使われていることに特に注意してほしい．

例 1 $\psi(z)$ を1価解析関数とする．このとき

$$[\psi(x)]_\pm = \psi(x) \pm \frac{1}{2}\mathrm{H.F.}\,\psi(z) \tag{2.6}$$

である．ただし，$\psi(x)$ はふつうの1価解析関数 $\psi(x)$ を見直した超関数，すなわち $\psi(x)=\mathrm{H.F.}\{\psi(z)\mathbf{1}(z)\}$ である．

これを見るには，定義の式 (2.1) に $\mathbf{1}_\pm(z)=\mathbf{1}(z)\pm1/2$ の関係式を使えばよい．
たとえば，$\psi(z)=1/z=-j\delta(z)$ とすると，(2.6)，(2.3) から

$$\left[\frac{1}{x}\right]_\pm \equiv \frac{1}{x\pm i0}=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x) \tag{2.7}$$

が得られる．

例 2　$\varphi(z)=\operatorname{Log} z=-jH(-z)$ を (2.1) に代入し (3.10.1)，(3.10.2) に注意すれば，つぎの結果が得られる．

$$[\operatorname{Log} x]_\pm=\log|x|\pm\pi iH(-x), \tag{2.8}$$

$$[\operatorname{Log}(-x)]_\pm=\log|x|\mp\pi iH(x), \tag{2.9}$$

$$[H(x)]_\pm=\pm\frac{1}{2}H(x)-\frac{1}{j}\log|x|, \tag{2.10}$$

$$[H(-x)]_\pm=\mp\frac{1}{2}H(-x)-\frac{1}{j}\log|x|. \tag{2.11}$$

(2.8)，(2.9) を x について微分すれば (2.7) が得られる．

例 3　$\varphi(z)=z^\alpha=e^{\alpha \operatorname{Log} z}=\exp[-j\alpha H(-z)]$ を (2.1) に代入し，$|x|^\alpha H(\pm x)=$ H.F.$\{\pm i(\mp z)^\alpha/2\sin\pi\alpha\}$ に注意すれば，つぎの結果が得られる．

$$[x^\alpha]_\pm=|x|^\alpha H(x)+e^{\pm\alpha\pi i}|x|^\alpha H(-x)=|x|^\alpha e^{\pm\alpha\pi iH(-x)}, \tag{2.12}$$

$$[(-x)^\alpha]_\pm=e^{\mp\alpha\pi i}[x^\alpha]_\pm=|x|^\alpha e^{\mp\alpha\pi iH(x)}, \tag{2.13}$$

$$|x|^\alpha H(\pm x)=\pm\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\{[(\mp x)^\alpha]_+-[(\mp x)^\alpha]_-\}. \tag{2.14}$$

§3.　上(下)型超関数の性質

上(下)型超関数のもつ基本的な性質を定理の形にまとめておこう．

[定理 1]　$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数とする．このとき

$$[\varphi(x)]_+=[\varphi(x)]_-=\varphi(x) \tag{3.1}$$

である．

（証明）　定義3により

$$\begin{aligned}[\varphi(x)]_\pm &= \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}_\pm(z)\}\\ &= \text{H.F.}\left[\varphi(z)\left\{\mathbf{1}(z)\pm\frac{1}{2}\right\}\right]\\ &= \text{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}(z)\} \qquad \because\ \text{H.F.}\ \varphi(z)=0\\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

ここで $\varphi(x)$ は解析関数を見直した超関数である．■

[定理 2]　任意の超関数 $f(x)=$ H.F. $F(z)$，$F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$，は

$$f(x) = [F_+(x)]_+ - [F_-(x)]_- = F_+(x+i0) - F_-(x-i0) \qquad (3.2)$$

のように，上型と下型の超関数に分解することができる．

(証明) $\mathbf{1}_+(z) - \mathbf{1}_-(z) = 1$ に注意すれば

$$F(z) = F(z)\{\mathbf{1}_+(z) - \mathbf{1}_-(z)\} = F_+(z)\mathbf{1}_+(z) - F_-(z)\mathbf{1}_-(z)$$

であるから，両辺の H.F. をとればよい．∎

母関数 $F(z)$ は x 軸上で正則な解析関数だけの不定性があるから，(3.2) の分解は一義的ではない．実際，適当に母関数を選ぶことにより，$[F_+(x)]_+$, $[F_-(x)]_-$ をそれぞれ上超関数と下超関数にすることができる．これはつぎの定理で保証される．

[定理 3] 任意の超関数は上超関数と下超関数に分解することができる．

(証明) 任意の超関数を $f(x) = \text{H.F.}\, F(z)$ とする．いま，超関数の定積分

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx = -\frac{1}{j}\int_{\mathrm{C}} \frac{F(t)}{t-z} dt \qquad (3.3)$$

を考える．($1/(x-z)$ は $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ に対して x の解析関数であるから，$f(x)/(x-z)$ は超関数である．積分路Cは x 軸の下側を $-\infty$ から $+\infty$ に，x 軸の上側を $+\infty$ から $-\infty$ に走る2本の無限曲線である．) $t \to \pm\infty$ に対して $F(t)$ が適当に小さくなれば，定積分は存在し，かつ $\tilde{F}(z)$ は $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ に対して正則である．しかも $\tilde{F}(z)$ は $F(z)$ と**同等**であることが容易に証明される．したがって

$$f(x) = \text{H.F.}\, \tilde{F}(z) \qquad (3.4)$$

と表わすことができる．($\tilde{F}(z)$ は $f(x)$ の**標準母関数**とよばれる．これについては後で詳しく説明する．) $\tilde{F}_+(z)$, $\tilde{F}_-(z)$ はそれぞれ $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ で正則であるから，$[\tilde{F}_+(x)]_+$, $[\tilde{F}_-(x)]_-$ はそれぞれ上超関数，下超関数となり，定理2を考え合わせると，定理3の結論に達する．

母関数 $F(z)$ が $z \to \pm\infty$ のとき小さくないばあいには，§2.4で導入した収束因子 $\varphi(z)$ を利用すればよい．すなわち，z 平面上いたるところで正則で，x 軸上に零点をもたず，$z \to \pm\infty$ のとき急速に∞になるような適当な解析関数 $\varphi(z)$ を選ぶ．(たとえば $\varphi(z) = e^{az^2} (a>0)$, $\varphi(z) = (1+z^2)^N$ (N は正の整数) など．) そして

$$\hat{F}(z) = \frac{\varphi(z)}{j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} \frac{dt}{t-z} \qquad (3.5)$$

を考えれば，

$$f(x) = \text{H.F.}\,\hat{F}(z) = [\hat{F}_+(x)]_+ - [\hat{F}_-(x)]_- \tag{3.6}$$

として，上・下超関数への分解が得られるのである．▮

[定理 4]　上型でかつ下型の超関数は正則である．すなわち，特異点をもたない．

（証明）　超関数 $f(x)$ が上型でかつ下型であるとすると

$$f(x) = \text{H.F.}\,[\varphi(z), 0], \tag{3.7}$$

$$f(x) = \text{H.F.}\,[0, -\psi(z)] \tag{3.8}$$

のように2通りの形で表わされる．ただし，$\varphi(z)$ は $0<\text{Im}\, z<A_+$ で，また $\psi(z)$ は $A_-<\text{Im}\, z<0$ で正則な解析関数である（A_+, A_- はそれぞれ正，負のある定数）．(3.7), (3.8) の差をとると，

$$\text{H.F.}\,[\varphi(z), \psi(z)] = 0.$$

$$\therefore\quad [\varphi(z), \psi(z)] = \Phi(z). \tag{3.9}$$

ここで，$\Phi(z)$ は x 軸を含むある領域Dで正則な解析関数である．(3.9) から，D内では $\varphi(z)=\Phi(z)$ $(0<\text{Im}\, z)$，$\psi(z)=\Phi(z)$ $(\text{Im}\, z<0)$ であることがわかる．したがって，解析関数の一致の定理により，領域Dを通じて $\varphi(z)=\psi(z)=\Phi(z)$ である．したがって，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則である．▮

[定理 5]　上かつ下の超関数は整関数（を見直した超関数）である．

（証明）　定理4の証明で，$\varphi(z)$ は上半平面で正則，$\psi(z)$ は下半平面で正則である．したがって $\Phi(z) = \varphi(z) = \psi(z)$ は全平面で正則，すなわち**整関数**である．▮

整関数を見直した超関数のことを，今後簡単に，整関数ということにする．

[定理 6]　$\varphi(z)$ は $0\leqq \text{Im}\, z \leqq A_\pm$ で正則な解析関数とする．このとき

$$\lim_{a\to\pm 0}\varphi(x+ai) = [\varphi(x)]_\pm = \varphi(x\pm i0) \tag{3.10}$$

が成り立つ．

（証明）　まず，$a\to+0$ のばあいを考える．定義3の (2.2) により

$$\begin{aligned}\varphi(x+ai) &= \text{H.F.}\,\varphi(z+ai)\mathbf{1}(z), \quad 0<a<A_+\\ &= \text{H.F.}\left[\varphi(z+ai)\left\{\mathbf{1}_+(z)-\frac{1}{2}\right\}\right]\\ &= \text{H.F.}\,\varphi(z+ai)\mathbf{1}_+(z). \end{aligned}\tag{3.11}$$

ただし，x 軸上で $\varphi(z+ai)$ が正則であることを使った．(3.11) の右辺は

$a\to+0$ のとき極限値 $\mathrm{H.F.}\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)=[\varphi(x)]_+$ をもつ．したがって，定義4.1の(4.2.1)により，(3.10)が得られる．$a\to-0$ のばあいも同様に証明できる．∎

例 4　定理6と(2.7)を使えば

$$\lim_{\varepsilon\to\pm0}\frac{1}{x+i\varepsilon}=\left[\frac{1}{x}\right]_{\pm}=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x) \tag{3.12}$$

が容易に得られる．例4.4と比較せよ．

定理5.1は，上・下型超関数の記号を使えばつぎのように言い表わされる．

[定理 7]　超関数 $f(x)$ の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x)&=\left[\int_{-\infty}^{c}f(x)e^{-i\xi x}dx\right]_{+}+\left[\int_{c}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\right]_{-}\\&=\int_{-\infty}^{c}f(x)e^{-i(\xi+i0)x}dx+\int_{c}^{\infty}f(x)e^{-i(\xi-i0)x}dx\end{aligned} \tag{3.13}$$

で与えられる．ただし，$x=\pm\infty$ での積分の値を0とおく．実数 c は，$x=c$ で $f(x)$ が積分可能でありさえすれば，任意に選ぶことができる．

(3.13)は $\mathcal{F}f(x)$ の上・下型超関数への分解を具体的に示している．右辺の各項はそれぞれ ζ の上半平面 ($\mathrm{Im}\,\zeta>0$)，下半平面 ($\mathrm{Im}\,\zeta<0$) で収束する(もちろん $f(x)$ の $x\to\pm\infty$ での性質にある種の制限がつくが) から，実は，上超関数と下超関数になっている．これからただちにつぎの定理が得られる．

[定理 8]　左(右)超関数の Fourier 変換は，もし存在すれば，上(下)超関数である．

(証明)　$f(x)$ を左超関数とすると，定義1により，$x>k$ に対して $f(x)=0$ である．ここで k はある適当な実数である．この k を定理7の実数 c として選ぶと，(3.13)の右辺の第2項は消える．すなわち $\mathcal{F}f(x)$ は上超関数である．$f(x)$ が右超関数ならば，同様の議論で $\mathcal{F}f(x)$ が下超関数であることがわかる．∎

[定理 9]　中央超関数の Fourier 変換はつねに存在し，それは整関数である．

(証明)　(3.13)の式で，$f(x)$ は $x<k_1$, $x>k_2$ (k_1, k_2 は適当な実数) で0であるから，定積分は必ず存在する．したがって $\mathcal{F}f(x)$ はつねに存在する．つぎに，中央超関数は左かつ右の超関数であるから，定理8により，$\mathcal{F}f(x)$ は上かつ下の超関数である．したがって，定理5により，$\mathcal{F}f(x)$ は整関数である．∎

例 5　(5.5.5)，(5.5.6)は(2.7)により

$$\mathcal{F}H(\pm x)=\frac{1}{2}\delta(\xi)\pm\frac{1}{j\xi}=\pm\frac{1}{j}\left[\frac{1}{\xi}\right]_{\mp} \tag{3.14}$$

と書き表わされる．また，(5.5.8) は

$$\mathcal{F}H(x;-a,a)=\frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi},\quad a>0 \tag{3.15}$$

のように表わされる．定理 8，定理 9 が成り立つことはこのばあい明らかであろう．

例 6　ふつうの関数の Fourier 変換の公式から超関数の Fourier 変換の公式が得られることを簡単な例で示そう．$a>0$ に対して

$$\mathcal{F}\{e^{-2\pi ax}H(x)\}=\int_0^\infty e^{-2\pi ax}e^{-j\xi x}dx=\int_0^\infty e^{-j(\xi-ia)x}dx=\frac{1}{j}\frac{1}{\xi-ia} \tag{3.16}$$

であることは容易にわかる．ここで $a\to 0$ の極限を考える．定理 4.3 の (v) により

$$\lim_{a\to 0}\mathcal{F}\{e^{-2\pi ax}H(x)\}=\mathcal{F}[\lim_{a\to 0}\{e^{-2\pi ax}H(x)\}]=\mathcal{F}H(x)$$

であるから，(3.12) を考慮すれば

$$\mathcal{F}H(x)=\frac{1}{j}\left[\frac{1}{\xi}\right]_-=\frac{1}{j}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi) \tag{3.17}$$

が得られるのである．

§4.　上(下)型超関数の計算

任意の超関数は上型と下型の超関数に分解することができるから，上(下)型超関数の計算に際して成り立つ法則を知っておくと便利である．つぎにこれらを定理の形にまとめておこう．

[定理 10]　解析関数 $\varphi(z)$ から導かれる超関数 $[\varphi(x)]_+$, $[\varphi(x)]_-$ について，つぎの関係が成り立つ．

$$[\varphi(x)]_\pm(-x)=[\varphi(-x)]_\mp, \tag{4.1}$$

$$[\varphi(x)]_\pm=[\varphi(-x)]_\mp(-x), \tag{4.2}$$

$$\overline{[\varphi(x)]_\pm}=[\bar{\varphi}(x)]_\mp, \tag{4.3}$$

$$[\varphi(x)]_\pm=\overline{[\bar{\varphi}(x)]_\mp}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{F}[\varphi(x)]_\pm=\{\mathcal{F}[\varphi(-x)]_\mp\}(-\xi), \tag{4.5}$$

$$\mathcal{F}[\varphi(x)]_\pm=\overline{\mathcal{F}[\bar{\varphi}(x)]_\mp(-\xi)}. \tag{4.6}$$

（証明）　定義 3 の (2.1) により

$$[\varphi(x)]_+(x)=\mathrm{H.F.}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}. \tag{4.7}$$

引数 x を $-x$ にかえると，定義 3.1 により

$$[\varphi(x)]_+(-x)=-\mathrm{H.F.}\{\varphi(-z)\mathbf{1}_+(-z)\}$$

$$= \text{H.F.}\{\varphi(-z)\mathbf{1}_-(z)\} \qquad \because \quad (3.5.7)$$
$$= [\varphi(-x)]_-(x)$$

である. これで (4.1) の複号の上のばあいが得られた. 下のばあいも同様である.

(4.1) の引数を $x \to -x$ のようにかえると (4.2) が得られる.

つぎに, (4.7) の複素共役をとると, 定義 3.3 により

$$\overline{[\varphi(x)]_+(x)} = -\text{H.F.}\{\bar{\varphi}(z)\bar{\mathbf{1}}_+(z)\}$$
$$= \text{H.F.}\{\bar{\varphi}(z)\mathbf{1}_-(z)\} \qquad \because \quad (3.5.7)$$
$$= [\bar{\varphi}(x)]_-(x).$$

これは (4.3) の複号の上のばあいである. 下のばあいについても同様に証明される.

(4.3) の複素共役をとると (4.4) が得られる.

つぎに, (4.2) の Fourier 変換を考える.

$$\mathcal{F}[\varphi(x)]_\pm = \mathcal{F}\{[\varphi(-x)]_\mp(-x)\}$$
$$= \{\mathcal{F}[\varphi(-x)]_\mp\}(-\xi).$$

ただし, $\mathcal{F}f(x) = g(\xi)$ のとき $\mathcal{F}f(-x) = g(-\xi)$ という関係を使う. これで (4.5) が得られた.

最後に, (4.4) の Fourier 変換をとり, $\mathcal{F}f(x) = g(\xi)$ のとき $\mathcal{F}\overline{f(x)} = \overline{g(-\xi)}$ という関係を使うと (4.6) が得られる. ∎

この定理によれば, 引数の符号を変えたり, あるいは超関数自身の複素共役をとったりすると, 上型は下型に, また下型は上型に変わることがわかる. また, $[\varphi(x)]_+$ や $\mathcal{F}[\varphi(x)]_+$ が既知のとき, $[\varphi(x)]_-$ や $\mathcal{F}[\varphi(x)]_-$ がただちに求められるということは, この定理の重要な応用例である.

注意 記号 $\varphi(x \pm i0)$ を使うと, 定理 10 の各式はつぎのようになる.

$$\varphi(-x \pm i0) = \varphi\{-(x \mp i0)\}, \tag{4.1'}$$
$$\varphi(x \pm i0) = \varphi\{-(-x \mp i0)\}, \tag{4.2'}$$
$$\overline{\varphi(x \pm i0)} = \bar{\varphi}(x \mp i0), \tag{4.3'}$$
$$\varphi(x \pm i0) = \overline{\bar{\varphi}(x \mp i0)}, \tag{4.4'}$$
$$\mathcal{F}\varphi(x \pm i0) = [\mathcal{F}\varphi\{-(x \mp i0)\}](-\xi), \tag{4.5'}$$
$$\mathcal{F}\varphi(x \pm i0) = \overline{\{\mathcal{F}\bar{\varphi}(x \mp i0)\}(-\xi)}. \tag{4.6'}$$

これらの式を見ると, φ の引数のなかの括弧をふつうの方式にしたがって機械的にはずしてもよいことがわかる. これは一見自明のようではあるが, 結果的にそうなるというだけで, やはり上のような証明が必要なのである.

例 7　$[1/x]_+ = 1/x - \pi i\delta(x)$ から $[1/x]_-$ を求めよ．

$\varphi(z) = 1/z$ であるから，(4.2) により

$$\left[\frac{1}{x}\right]_- = \left[\frac{1}{-x}\right]_+(-x) = -\left[\frac{1}{x}\right]_+(-x)$$
$$= -\left\{\frac{1}{-x} - \pi i\delta(-x)\right\} = \frac{1}{x} + \pi i\delta(x).$$

あるいは，(4.4) を使うと，$\bar{\varphi}(z) = 1/z$ であるから

$$\left[\frac{1}{x}\right]_- = \overline{\left[\frac{1}{x}\right]_+} = \frac{1}{x} + \pi i\delta(x).$$

このように，(4.2)，(4.4) のどちらを使っても結果が得られるが，いまのばあいは (4.4) による方が簡単である．

例 8　例 2，例 3 の諸式について，$[\cdot]_+$ の式から $[\cdot]_-$ の式を求めよ．

例 9　α は任意の複素数（負の整数を除く）とする．このとき

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x) = \Gamma(\alpha+1)[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_-, \tag{4.8}$$
$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(-x) = \Gamma(\alpha+1)[(\bar{j}\xi)^{-(\alpha+1)}]_+ \tag{4.9}$$

であることを示せ．ただし，$\bar{j} = 2\pi\bar{i} = 2\pi i^{-1} = 2\pi e^{-(\pi/2)i} = je^{-\pi i}$ とする．

定理 7 で $f(x) = |x|^\alpha H(x)$, $c = 0$ ととると

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x) = [\varphi(\xi)]_-, \tag{4.10}$$
$$\varphi(\zeta) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-j\zeta x}dx \tag{4.11}$$

となる．ただし，上の定積分が収束するように，さしあたり $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ と仮定しておく．積分変数を x から

$$t = j\zeta x \tag{4.12}$$

に変えると，(4.11) は

$$\varphi(\zeta) = (j\zeta)^{-(\alpha+1)}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt \quad (\mathrm{Im}\,\zeta < 0)$$
$$= \Gamma(\alpha+1)(j\zeta)^{-(\alpha+1)} \tag{4.13}$$

となる．（積分変数の変換にともなって積分路は $\arg\zeta + \pi/2$ だけ実数軸から傾いた半直線に変わるが，これをふたたび実数軸の正の部分にひきもどすことができる．）(4.13) を (4.10) に代入すれば (4.8) が得られる．

以上は $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ という条件のもとに得られた結果であるが，**解析接続**の考えを使えば，この制限はとり除かれる．すなわち，(4.8) の両辺は $\alpha \neq -m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ に対して正則な α の解析関数であるから，$\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ について成り立つ等式はそのまま任意の $\alpha \neq -m$ について成り立つのである．

(4.8) の x を $-x$ におきかえると

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(-x) = \Gamma(\alpha+1)[(j\xi)^{-(\alpha+1)}]_-(-\xi)$$
$$= \Gamma(\alpha+1)[j^{-(\alpha+1)}(-\xi)^{-(\alpha+1)}]_+ \qquad \because\ (4.1)$$

$$=\Gamma(\alpha+1)[j^{-(\alpha+1)}e^{(\alpha+1)\pi i}\xi^{-(\alpha+1)}]_+$$
$$=\Gamma(\alpha+1)[(\bar{j}\xi)^{-(\alpha+1)}]_+$$

として (4.9) が得られる．ただし，一般的に成り立つ関係

$$[(-x)^\alpha]_\pm=e^{\mp\alpha\pi i}[x^\alpha]_\pm \tag{4.14}$$

を使った．(4.14) は (6.2.16) を書きかえた

$$(-z)^\alpha\mathbf{1}_\pm(z)=e^{\mp\alpha\pi i}z^\alpha\mathbf{1}_\pm(z) \tag{4.15}$$

からただちに得られる．前に導いた (6.3.3)，すなわち

$$\mathcal{F}|x|^\alpha H(x)=\Gamma(\alpha+1)|2\pi\xi|^{-(\alpha+1)}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}(\alpha+1)i\operatorname{sgn}\xi\right\}$$

はもちろん (4.8) と一致すべきものである．(例3の結果を使ってこれを確かめよ．)

(4.8) の表現は，右超関数の Fourier 変換が下超関数であることを明示する点で，前の結果よりすぐれているといえるだろう．また，ここの (4.8) 式の導き方は前の方法に比べて簡素化されていることに注意してほしい．

§5.　上(下)型超関数の Fourier 変換

任意の超関数は上型と下型の超関数に分解できる．また，定理10によれば，下型の超関数は $[\varphi(x)]_-=[\varphi(-x)]_+(-x)$ あるいは $[\varphi(x)]_-=\overline{[\overline{\varphi}(x)]_+}$ の関係を使って上型の超関数にひき直すことができる．したがって，上型超関数について議論しておけば，任意の超関数についての諸性質はすべて明らかになるといってもよい．そこで，この節では上型超関数の Fourier 変換について議論する．しかし，応用の際の便宜を考えて，下型超関数についても適用できる形に結果を述べることにする．

[定理 11]　$\varphi(z)$ は $0\leqq\operatorname{Im}z\leqq A_\pm$ で正則な解析関数とする．このとき，$0\gtreqless\operatorname{Im}c\leqq A_\pm$ に対して

$$\mathcal{F}\{\varphi(z+c)\mathbf{1}_\pm(z)\}=e^{jc\xi}\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_\pm(z)\} \tag{5.1}$$

が成り立つ(複号同順)．ただし $0\gtreqless\operatorname{Im}c$ は $0\leqq\operatorname{Im}c$，$0\geqq\operatorname{Im}c$ の2つのばあいを意味するものとする．

(証明)　まず $\varphi(z)$ が $0<\operatorname{Im}z<A_+$ で正則で，$0\leqq\operatorname{Im}c<A_+$ のばあいを考える．

$\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)$ は上型超関数の母関数である．また，帯状領域 $0<\operatorname{Im}z<A_+-\operatorname{Im}c$ では $0\leqq\operatorname{Im}c<\operatorname{Im}(z+c)<A_+$ であるから $\varphi(z+c)$ は正則であり，したがって $\varphi(z+c)\mathbf{1}_+(z)$ も上型超関数の母関数である．さて，Fourier 変換の定義により

$$\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}=\left[\int_{l},\int_{r}\right]\varphi(z)e^{-j\xi z}dz. \tag{5.2}$$

ここで積分路 l, r は端点を $z=c$ に選ぶことができる(図1). 積分変数を z から

$$t = z-c \tag{5.3}$$

に変えると

$$\begin{aligned}\int \varphi(z)e^{-j\xi z}dz &= \int \varphi(t+c)e^{-j\xi(t+c)}dt\\ &= e^{-jc\xi}\int \varphi(t+c)e^{-j\xi t}dt \end{aligned}\tag{5.4}$$

となる. t 平面での積分路 l', r' は上半平面にある(図2). したがって

$$\left[\int_{l'}, \int_{r'}\right]\varphi(t+c)e^{-j\xi t}dt = \mathfrak{F}\{\varphi(t+c)\mathbf{1}_+(t)\}. \tag{5.5}$$

(5.4), (5.5) を (5.2) に代入すれば, (5.1) の上号のばあいが得られる. 下号のばあいも同様である. ▮

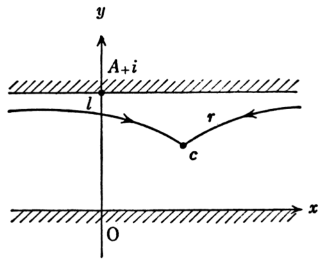


図 1

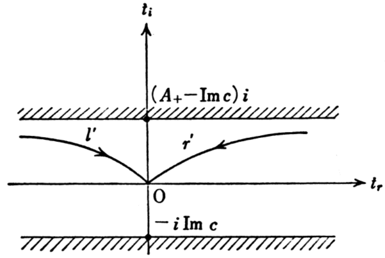


図 2

[定理 12]　$\varphi(z)$ は $0 \leqq \mathrm{Im}\,z \leqq A_\pm$ で正則な解析関数とする. このとき

$$\mathfrak{F}\varphi(x+c) = e^{jc\xi}\mathfrak{F}[\varphi(x)]_\pm, \quad 0 \leqq \mathrm{Im}\,c \leqq A_\pm \tag{5.6}$$

が成り立つ. また

$$\mathfrak{F}f(x) = [\varphi(\xi)]_\pm \tag{5.7}$$

とすれば

$$\mathfrak{F}\{e^{-jcx}f(x)\} = \varphi(\xi+c), \quad 0 \leqq \mathrm{Im}\,c \leqq A_\pm \tag{5.8}$$

である.

(証明)　$\mathrm{Im}\,c \neq 0$ であるから, $\varphi(z+c)$ は x 軸上で正則である. したがって

$$\varphi(z+c)\mathbf{1}_\pm(z) \cong \varphi(z+c)\mathbf{1}(z).$$

そこで (5.1) の両辺の H.F. をとると, (5.6) が得られる.

つぎに, (5.7) から (ξ と x とを入れかえて),

$$\mathfrak{F}[\varphi(x)]_\pm = \mathfrak{F}\mathfrak{F}f(x) = f(-x).$$

これを (5.6) に代入すれば

$$\mathfrak{F}\varphi(x+c) = e^{jc\xi}f(-\xi).$$

$$\therefore\quad \varphi(x+c) = \mathfrak{F}^{-1}\{e^{jc\xi}f(-\xi)\} = \mathfrak{F}\{e^{-jc\xi}f(\xi)\}.$$

すなわち，x と ξ とを入れかえれば，(5.8) である．∎

[定理 13] $\varphi(z)$ は $A_-<\mathrm{Im}\,z<A_+$ $(A_-<0<A_+)$ で正則な解析関数とする．このとき，$A_-<\mathrm{Im}\,c<A_+$ に対して

$$\mathcal{F}\varphi(x+c)=e^{jc\xi}\mathcal{F}\varphi(x) \tag{5.9}$$

が成り立つ．また，$\mathcal{F}f(x)=\varphi(\xi)$ とすれば

$$\mathcal{F}\{e^{-jcx}f(x)\}=\varphi(\xi+c) \tag{5.10}$$

である．

（証明） 仮定により，$\varphi(x+c)$ のみならず $\varphi(x)$ も正則である．したがって $[\varphi(x)]_+=[\varphi(x)]_-=\varphi(x)$ であるから，定理 12 の (5.6) から ただちに (5.9) が得られる．$\mathrm{Im}\,c=0$ のばあいは一見定理 12 に含まれていないようであるが，そのばあい (5.9) が成り立つことは すでに (5.3.15) として 知られている．((5.3.15) で $a=1$, $b=k$ とおいたものである．) (5.10) は単に (5.9) を Fourier 逆変換した関係である．∎

$c=k$ (k は実数) とすれば $\mathrm{Im}\,c=0$ となり，(5.1) の H.F. をとったものは

$$\mathcal{F}[\varphi(x+k)]_\pm=e^{jk\xi}\mathcal{F}[\varphi(x+k)]_\pm \tag{5.11}$$

となる．しかし，実は任意の超関数 $f(x)$ に対して一般に

$$\mathcal{F}f(x+k)=e^{jk\xi}\mathcal{F}f(x) \tag{5.12}$$

の関係が 成り立つことはすでに 知られている．(5.11) はその 特別なばあいに過ぎないのである．(もっとも，任意の超関数は 上型と下型の超関数に分解できることに注意すれば，(5.11) から (5.12) を導くことができる．)

定理 12 は，ふつうの関数について周知の関係 (5.12) を k が複素数のばあいに拡張したものにほかならない．この定理は，後で例で示すように，実際計算上きわめて有力である．

§6. 上(下)型のベキ型超関数とその Fourier 変換

ベキ型超関数 $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha\,\mathrm{sgn}\,x$ は，定義から 明らかなように，$[x^\alpha]_+$, $[x^\alpha]_-$ のような上(下)超関数に分解することができる．これらを**上(下)型のベキ型超関数**と よぶことに しよう．対数関数を 含む $|x|^\alpha(\log|x|)^n H(x)$ などに 対応するものとしては $[x^\alpha(\mathrm{Log}\,x)^n]_\pm$ がある．(これを $[x^\alpha(\log|x|)^n]_\pm$ などとしてはいけない！ $[\varphi(x)]_\pm$ が意味をもつのは，$\varphi(z)$ が z の 解析関数のばあいに限るからである．) 逆に，上(下)型のベキ型超関数は，例 2，例 3 で見たように，ベキ型超関数の線形結合として表わすことができる．したがって，

原理的にはそれらの Fourier 変換を新しく求める必要はない．しかし，応用上の便宜を考えて，その具体的な形を与えておこう．

(4.8), (4.9) の両辺の $\mathcal{F}$ をとり，ξ と x とをとりかえ，さらに $-(\alpha+1)$ を改めて α と書くことにすると，容易に

$$\mathcal{F}[x^\alpha]_\pm = 2\pi \frac{e^{\pm i\pi\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha)} |2\pi\xi|^{-(\alpha+1)} H(\pm\xi) \tag{6.1}$$

の公式が得られる．これは $\alpha \neq p\ (p=0,1,2,\cdots)$ に対して成り立つ．(6.1) を α に関して n 回微分すれば

$$\mathcal{F}[x^\alpha(\mathrm{Log}\,x)^n]_\pm = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\mathcal{F}[x^\alpha]_\pm \tag{6.2}$$

が計算される．しかし，つぎのようにすれば計算の見通しがよい．α を $\alpha+\varepsilon$ に変えると，(6.1) は

$$\mathcal{F}[x^\alpha e^{\varepsilon \mathrm{Log}\,x}]_\pm = 2\pi \frac{e^{\pm i\pi\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha)} |2\pi\xi|^{-(\alpha+1)} H(\pm\xi) P_\pm(\xi, -\alpha\,;\varepsilon), \tag{6.3}$$

$$P_\pm(\xi,\alpha\,;\varepsilon) = \exp\Big[\log\Gamma(\alpha) - \log\Gamma(\alpha-\varepsilon) - \varepsilon\Big(\log|2\pi\xi| \mp \frac{\pi}{2}i\Big)\Big] \tag{6.4}$$

と書き表わせる．そこで，(6.3) の両辺を ε のベキ級数に展開して，同じベキの係数を比較すればよいのである．(6.4) は

$$P_\pm(\xi,\alpha\,;\varepsilon) = \exp\Big[\varepsilon h_\pm(\xi,\alpha) - \frac{1}{2!}\varepsilon^2\psi'(\alpha) + \frac{1}{3!}\varepsilon^3\psi''(\alpha) - \cdots\Big], \tag{6.5}$$

$$h_\pm(\xi,\alpha) = \psi(\alpha) - \log|2\pi\xi| \pm \frac{\pi}{2}i \tag{6.6}$$

のように展開される．したがって

$$\mathcal{F}[x^\alpha \mathrm{Log}\,x]_\pm = h_\pm(\xi,-\alpha)\mathcal{F}[x^\alpha]_\pm, \tag{6.7}$$

$$\mathcal{F}[x^\alpha(\mathrm{Log}\,x)^2]_\pm = \{[h_\pm(\xi,-\alpha)]^2 - \psi'(-\alpha)\}\mathcal{F}[x^\alpha]_\pm, \tag{6.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が得られるのである．

$\alpha = p\ (p=0,1,2,\cdots)$ のばあいには，§6.5 と同様，定理 4.14 を利用すればよい．こうして

$$\mathcal{F}[x^p e^{\varepsilon\,\mathrm{Log}\,x}]_\pm = \frac{1}{(-j)^p}\delta^{(p)}(\xi)P_\pm(1,p\,;\varepsilon) \mp \varepsilon j \frac{p!}{(j\xi)^{p+1}} H(\pm\xi) \frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi\varepsilon} P_\pm(\xi,p\,;\varepsilon) \tag{6.9}$$

が得られる．ただし

$$P_{\pm}(\xi, p; \varepsilon) = \exp\left[\log \Gamma(p+1+\varepsilon) - \log \Gamma(p+1) - \varepsilon\left(\log|2\pi\xi| \mp \frac{\pi}{2}i\right)\right] \tag{6.10}$$

とおいてある．（証明は読者にまかせる．）これから

$$\mathcal{F}[x^p]_{\pm} = \frac{1}{(-j)^p}\delta^{(p)}(\xi), \tag{6.11}$$

$$\mathcal{F}[x^p \mathrm{Log}\, x]_{\pm} = \frac{1}{(-j)^p}\delta^{(p)}(\xi)h_{\pm}(1, p+1) \mp j\frac{p!}{(j\xi)^{p+1}}H(\pm\xi), \tag{6.12}$$

$$\mathcal{F}[x^p(\mathrm{Log}\, x)^2]_{\pm} = \frac{1}{(-j)^p}\delta^{(p)}(\xi)\{[h_{\pm}(1, p+1)]^2 + \psi'(p+1)\}$$

$$\mp 2j\frac{p!}{(j\xi)^{p+1}}H(\pm\xi)h_{\pm}(\xi, p+1), \tag{6.13}$$

…………

が見出される．ただし，ここの $h_{\pm}(\xi, \alpha)$ は (6.6) で与えられる関数である．

上(下)型のベキ型超関数の Fourier 変換がもとのベキ型超関数のそれと比べて簡単な形をしていることに注意してほしい．実際，α が負の整数のばあいは一般の α に対する公式 (6.1)〜(6.8) がそのまま成り立つのである．

§7. 応　用　例

定理 12, 定理 13 を利用すれば，簡単な Fourier 変換の公式から種々の複雑な公式が容易に得られることを例を挙げて示そう．

例 10　$\varphi(z) = \dfrac{1}{z}$

この $\varphi(z)$ は $0<\mathrm{Im}\, z<\infty$ で正則である．したがって，定理 12 で $A_+ = \infty$ ととることができる．いま $a>0$ と仮定して，$c = ai$ とおけば，(5.6) により

$$\mathcal{F}\frac{1}{x+ai} = e^{-2\pi a\xi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right]_+ \tag{7.1}$$

である．ところが，(3.14) の Fourier 逆変換をとれば，

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right]_+ = -jH(\xi) \tag{7.2}$$

が得られる．（一般公式 (6.1) で $\alpha = -1$ とおいてもよい．）これを (7.1) に代入すれば

$$\mathcal{F}\frac{1}{x+ai} = -je^{-2\pi a\xi}H(\xi), \quad a>0 \tag{7.3}$$

となる．ここで $x \to -x$ とおきかえると $\xi \to -\xi$ となり

$$\mathcal{F}\frac{1}{x-ai} = je^{2\pi a\xi}H(-\xi), \quad a>0 \tag{7.4}$$

が得られる．(7.3) と (7.4) の和と差をつくり，それぞれ 2 または $2ai$ で割れば

$$\mathcal{F}\frac{x}{x^2+a^2}=-\pi i e^{-2\pi a|\xi|}\operatorname{sgn}\xi,\quad a>0 \tag{7.5}$$

$$\mathcal{F}\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\xi|},\quad a>0 \tag{7.6}$$

が得られる．

なお，$\mathcal{F}f^{(m-1)}(x)=(j\xi)^{m-1}\mathcal{F}f(x)$ の関係を使うと，(7.3)，(7.4) から

$$\mathcal{F}\frac{1}{(x\pm ai)^m}=\mp j\frac{(-j\xi)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-2\pi a|\xi|}H(\pm\xi),\quad a>0 \tag{7.7}$$

が得られる．

例 11 つぎの結果を導け．

$$\mathcal{F}\operatorname{Log}(x\pm ai)=\mp\frac{1}{\xi}e^{-2\pi a|\xi|}H(\pm\xi)-\left(\gamma+\log 2\pi\mp\frac{\pi}{2}i\right)\delta(\xi), \tag{7.8}$$

$$\mathcal{F}\log(x^2+a^2)=-\frac{1}{\xi}e^{-2\pi a|\xi|}\operatorname{sgn}\xi-2(\gamma+\log 2\pi)\delta(\xi), \tag{7.9}$$

$$\mathcal{F}\tan^{-1}\frac{x}{a}=-\frac{i}{2}\frac{1}{\xi}e^{-2\pi a|\xi|}. \tag{7.10}$$

ただし，$a>0$ とする．

$\varphi(z)=\operatorname{Log} z$ は $0\leqq \operatorname{Im} z\leqq\pm\infty$ で正則である．さて，一般公式 (6.12) で $p=0$ とおけば，

$$\mathcal{F}[\operatorname{Log} x]_{\pm}=\mp\frac{1}{\xi}H(\pm\xi)-\left(\gamma+\log 2\pi\mp\frac{\pi}{2}i\right)\delta(\xi) \tag{7.11}$$

となる．ただし，(6.6) を使い，また $\psi(1)=-\gamma$ であることに注意する．

(7.11) に定理 12 を応用し，$e^{\mp 2\pi a\xi}\delta(\xi)=\delta(\xi)$ に注意すれば，ただちに (7.8) が得られる．(7.8) の±の 2 つの式の和と差をつくれば (7.9) と (7.10) が得られる．

例 12 つぎの公式を導け．

$$\mathcal{F}\operatorname{sech}\pi x=\operatorname{sech}\pi\xi, \tag{7.12}$$

$$\mathcal{F}\operatorname{cosech}\pi x=-i\tanh\pi\xi, \tag{7.13}$$

$$\mathcal{F}\tanh\pi x=-i\operatorname{cosech}\pi\xi, \tag{7.14}$$

$$\mathcal{F}\coth\pi x=-i\coth\pi\xi. \tag{7.15}$$

まず

$$\varphi(z)=\operatorname{cosech}\pi z=\frac{1}{\sinh\pi z} \tag{7.16}$$

が $z=Ni\ (N=0,\pm1,\cdots)$ で 1 位の極をもち，それ以外ではいたるところ正則であることに注意する．したがって，$\varphi(z)$ は $0<\operatorname{Im} z<1$ で正則である．そこで，定理 12 を $c=i/2$ として適用すれば

$$\mathcal{F}\operatorname{cosech}\left(\pi x+\frac{i\pi}{2}\right)=e^{-\pi\xi}\mathcal{F}[\operatorname{cosech}\pi x]_+$$

となる．ところが

$$\operatorname{cosech}\left(\pi z+\frac{i\pi}{2}\right)=-i\operatorname{sech}\pi z \tag{7.17}$$

であるから，上の式は

$$\mathcal{F}\,\mathrm{sech}\,\pi x = ie^{-\pi\xi}\mathcal{F}\,[\mathrm{cosech}\,\pi x]_+ \tag{7.18}$$

を与える．さて，cosech πz は1価解析関数であるから，例1により，

$$[\mathrm{cosech}\,\pi x]_\pm = \mathrm{cosech}\,\pi x \pm \frac{1}{2}\mathrm{H.F.}\,\mathrm{cosech}\,\pi z \tag{7.19}$$

である．x 軸上では cosech πz の特異点は $z=0$ だけであって，そこでは cosech πz は $(\pi z)^{-1}$ のようにふるまうから

$$\begin{aligned}\mathrm{cosech}\,\pi z &= \frac{1}{\pi z} + \Phi(z) \\ &\cong \frac{1}{\pi z} = -2i\delta(z)\end{aligned} \tag{7.20}$$

である．ただし，$\Phi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数，$\cong$ は同等記号，$\delta(z) = -(jz)^{-1}$ は $\delta(x)$ の母関数である．したがって，(7.19) は

$$[\mathrm{cosech}\,\pi x]_\pm = \mathrm{cosech}\,\pi x \mp i\delta(x) \tag{7.21}$$

と書きかえられる．

(7.21) を (7.18) に代入すれば

$$\mathcal{F}\,\mathrm{sech}\,\pi x = ie^{-\pi\xi}\mathcal{F}\,\mathrm{cosech}\,\pi x + e^{-\pi\xi} \tag{7.22}$$

が得られる．この式で $x\to -x$, $\xi\to -\xi$ とおきかえた式も成り立つ．すなわち

$$\mathcal{F}\,\mathrm{sech}\,\pi x = -ie^{\pi\xi}\mathcal{F}\,\mathrm{cosech}\,\pi x + e^{\pi\xi}. \tag{7.23}$$

(7.22), (7.23) を $\mathcal{F}$ sech πx, $\mathcal{F}$ cosech πx に対する連立1次方程式と考えて解くと(7.12), (7.13) が得られるのである．

(7.14) は (7.13) の Fourier 逆変換にほかならない．

最後に，(7.15) を導くには，$\varphi(z) = \coth \pi z$ について上と同様の議論を行なえばよい．すなわち，(7.17), (7.20), (7.21) に対応して

$$\coth\left(\pi z + \frac{i\pi}{2}\right) = \tanh \pi z, \tag{7.24}$$

$$\coth \pi z \cong \frac{1}{\pi z} = -2i\delta(z), \tag{7.25}$$

$$[\coth \pi x]_\pm = \coth \pi x \mp i\delta(x) \tag{7.26}$$

が成り立つから，(7.18) に対応して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\tanh \pi x &= e^{-\pi\xi}\mathcal{F}\,[\coth \pi x]_+ \\ &= e^{-\pi\xi}\{\mathcal{F}\coth \pi x - i\}\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで左辺に (7.14) を代入して $\mathcal{F}$ coth πx について解けば，(7.15) が得られるのである．

例 13　つぎの公式を導け．

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cosh 2\pi a x}{\cosh \pi x}\right\} = \frac{2\cos \pi a \cosh \pi\xi}{\cosh 2\pi\xi + \cos 2\pi a}, \tag{7.27}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sinh 2\pi a x}{\cosh \pi x}\right\} = -2i\frac{\sin \pi a \sinh \pi\xi}{\cosh 2\pi\xi + \cos 2\pi a}, \tag{7.28}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sinh 2\pi ax}{\sinh \pi x}\right\}=\frac{\sin 2\pi a}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a}, \tag{7.29}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cosh 2\pi ax}{\sinh \pi x}\right\}=-i\frac{\sinh 2\pi\xi}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a}. \tag{7.30}$$

ただし，$-1<2a<1$ とする．

$\varphi(z)=\operatorname{sech}\pi z$ は $-1/2<\operatorname{Im} z<1/2$ で正則な解析関数である．したがって，定理 13 で $A_-=-1/2$, $A_+=1/2$, $c=\pm ai$ $(-1<2a<1)$ としたものが適用できる．その際，(7.12) により

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)=\operatorname{sech}\pi x$$

であって，(5.10) は

$$\mathcal{F}\{e^{\mp 2\pi ax}\operatorname{sech}\pi x\}=\operatorname{sech}\pi(\xi\pm ai) \tag{7.31}$$

となる．(7.31) の ± の 2 つの式の和と差をつくれば，それぞれ (7.27) と (7.28) が得られる．

つぎに，$\varphi(z)=\tanh\pi z$ を考えると，これも $-1/2<\operatorname{Im} z<1/2$ で正則である．それゆえ，上と同様，定理 13 が適用できる．このばあい，(7.13) により

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)=i\operatorname{cosech}\pi x$$

であるから，(5.10) は

$$\mathcal{F}\{e^{\mp 2\pi ax}\operatorname{cosech}\pi x\}=-i\tanh\pi(\xi\pm ai) \tag{7.32}$$

となる．この ± の 2 つの式の和と差をつくれば，それぞれ (7.30) と (7.29) が得られるのである．

(7.27)～(7.29) の 3 つの公式はふつうの関数としても成り立つ．これに反して (7.30) は $x=0$ に特異点をもつので，超関数としてはじめて意味をもつ．また，これら 4 つの公式は $-1<2a<1$ の条件のもとに導かれたものであるが，$|a|\to 1/2-0$ の極限でも意味があることに注意してほしい．すなわち，(7.27), (7.29) はともに $\mathcal{F}1=\delta(\xi)$ を与え，(7.28), (7.30) はそれぞれ (7.14), (7.15) を与えるのである．

§8. ま と め

左(右)超関数，上(下)型超関数，上(下)超関数の概念を導入した．任意の超関数は上型と下型の超関数の和として，あるいはもっと精密にいえば上超関数と下超関数の和として表わされることを知った．任意の超関数を左超関数と右超関数の和として表わし得ることも直観的に明らかであるが，その証明は後章にゆずる．

上(下)型超関数は Fourier 変換に際して定理 12，定理 13 に述べられるような重要な性質をもっている．これを利用することによって具体的な超関数の Fourier 変換の公式が求めやすくなることをいくつかの例について説明した．

8 Fourier 変換——存在と正則性

§1. は じ め に

関数の概念を超関数までひろげることによって，Fourier 変換を許す関数（超関数）の範囲が大幅にひろがることはすでに見たとおりである．たとえば，$\mathcal{F}1=\delta(\xi)$, $\mathcal{F}x=-\delta'(\xi)/j$, $\mathcal{F}(1/x)=-\pi i\,\mathrm{sgn}\,\xi,\cdots$ などである．超関数 $f(x)=$ H.F. $F(z)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ は

$$g(\xi)=\text{H.F. } G(\zeta), \tag{1.1}$$

$$G(\zeta)=\left[\int_{l},\int_{r}\right]F(z)e^{-j\zeta z}dz \tag{1.2}$$

で定義される（定義 5.1）．(1.2) の積分路 l, r は図 1 に示すような，それぞれ左および右の無限遠（$z\to-\infty$, $z\to+\infty$）までのびた 2 つの半無限曲線より成っている．(1.2) の積分が存在しさえすれば $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)$ が存在するわけである．

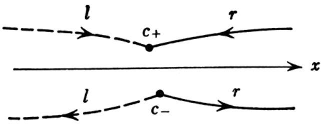


図 1

さて，$f(x)$ が**ふつうの関数**のばあいには，その Fourier 変換は x 軸に沿っての積分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx$ で定義されるのであるから，それが存在するためには，（i）有限区間で $f(x)e^{-j\xi x}$ が積分可能であることと，（ii）無限遠で積分可能であること，の 2 つが要求される．ところが，$f(x)$ を**超関数**と考えると，(1.2) で示されるように，**母関数** $F(z)$ についての積分が可能であればよい．$F(z)$ は積分路の上で正則であるから，上の（i）の条件は問題なく満たされている．それゆえ，（ii）の条件，つまり $F(z)e^{-j\zeta z}$ が無限遠で積分可能であることさえ保証されておればよいのである．

$e^{-j\zeta z}$ の肩の部分は

$$\begin{aligned}-j\zeta z&=-2\pi i(\xi+i\eta)(x+iy)\\&=2\pi(\eta x+\xi y)-2\pi i(\xi x-\eta y)\end{aligned}$$

であるから，

$$|F(z)e^{-j\zeta z}| = |F(z)|\exp\{2\pi(\eta x+\xi y)\}. \tag{1.3}$$

$G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ はそれぞれ $\eta>0$, $\eta<0$ についてのみ定義されればよい．これらを与える積分 (1.2) で問題となる無限遠はそれぞれ $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ であるが，これに対して (1.3) の exp の項は指数関数的に 0 になる．したがって，$z\to\pm\infty$ のとき $F(z)$ がたとえ無限大になっても，その無限大になるなり方が指数関数的より遅ければ $G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ が存在するのである．$f(x)$ がベキ型の超関数のときには確かにそうである．

さて，実用上現われる関数（超関数）はベキ型とはかぎらない．e^{ax}, $\sin ax$, e^{ax^2}, e^{iax^2},… などの初等関数でもすでにベキ型ではない．どのような型の関数（超関数）が Fourier 変換を許すのか．これについて以下にすこし考えてみよう．

§2.　eks α 型の関数および超関数

母関数 $F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$ は

$$F(z)=[F_+(z),0]+[0,F_-(z)]$$

のように分解することができる．したがって，Fourier 変換の存在をしらべるには，$[\varphi(z),0]$, $[0,\varphi(z)]$ の形の母関数について議論すればよい．そこで，(1.3) の右辺の形を考慮して，つぎの定義に含まれるような関数について考えることにする．

〔定義 1〕　$z=+\infty$, $-\infty$ の近傍（ある正数Rに対して $\mathrm{Re}\,z>R$, $\mathrm{Re}\,z<-R$ の領域）で正則で，かつ

$$\varphi(z) = O[\exp\{jkz+\alpha(\pm z)^s+o(z)\}] \tag{2.1}$$

のように表わされる関数 $\varphi(z)$ は **eks α 型**であるという．ただし，k, s は実数，α は複素数であって，$s\geqq1$, $\mathrm{Re}\,\alpha\leqq0$ とする．上の表現が成り立つ領域Dを **eks α 領域**とよぶことにしよう．Dを指定する必要があるばあいには，$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty,\mathrm{D})$, $\varphi(z)=\mathrm{eks}(-\infty,\mathrm{D})$ のように表わす．$z\to\pm\infty$ の近づき方によらず上の表現が成り立つばあいには，簡単に $\varphi(z)=\mathrm{eks}(\pm\infty)$ と書く．

たとえば，$z\to+\infty$ のばあいについては，つぎのような表わし方をする．

(i)　$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, x)$,

(ii)　$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, 0<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon)$,

(ii a)　$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, 0\leqq\mathrm{Im}\,z<\varepsilon)$,

(ii b)　$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, -\varepsilon<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon)$,

（iii）　$\varphi(z)=\text{eks}(+\infty, 0<\arg z<\delta)$,

（iii a）　$\varphi(z)=\text{eks}(+\infty, 0\leqq\arg z<\delta)$,

（iii b）　$\varphi(z)=\text{eks}(+\infty, -\delta<\arg z<\delta)$.

無限遠の近傍だけを問題にするのであるから，eks の中のDの表示では $|z|>R$ を省略して書く．また x 軸の近くだけが問題になるので，上の諸式で ε, δ はどんなに小さく選んでもよい．上の（i）は，x 軸上の $x>R$ で (2.1) が成り立つことを示す．（ii）～（ii b）は $+\infty$ の近傍の細い帯状領域で，また（iii）～（iii b）は $+\infty$ の近傍の狭いくさび型の領域で，(2.1) が成り立つことを示している．これらは図2で示される．（iii），（iii a），（iii b）がそれぞれ（ii），（ii a），（ii b）を含み，（i）が（ii），（iii）に含まれないことなどは明らかであろう．$z\to-\infty$ のばあいについても，もちろん上と同様の表示が使われる．

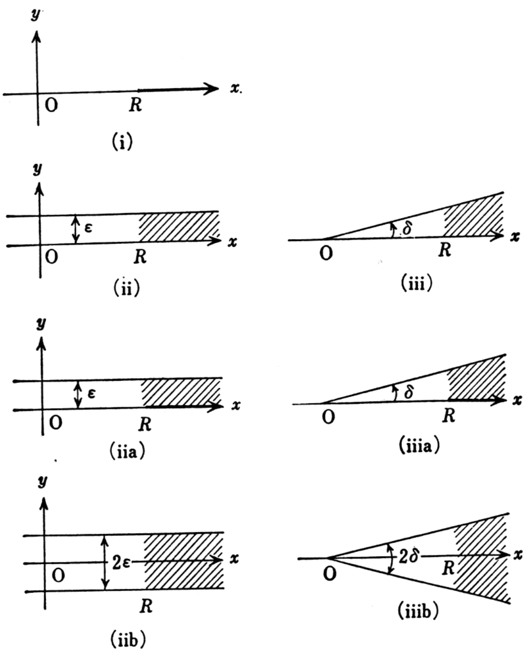


図 2

〔**定義 2**〕　解析関数 $\varphi(z)$ がその p 階微分まで含めて eks α 型であるとき，$\varphi(z)$ は $\text{eks}^{(p)}\alpha$ 型であるという．記号的には $\varphi(z)=\text{eks}^{(p)}(\pm\infty, \text{D})$ のように表わす．Dは (2.1) の表現の成り立つ領域すなわち eks α 領域を示す．

〔**定義 3**〕 母関数の上下両成分がともに eks α 型のとき，超関数は eks α 型であるという．$\mathrm{eks}^{(p)}\alpha$ 型についても同様である．

注意 (2.1) の右辺に現われる**記号** O, o について説明をしておこう．一般に "$f=O(g)$" というのは，極限に近づいたとき，**ある**正数Aを使って $|f|<A|g|$ と書くことができるという意味である．また，"$f=o(g)$" というのは，**どんなに小さい**正数 ε をとっても，極限の十分近くでは $|f|<\varepsilon|g|$ が成り立つという意味である．したがって，$o(g)$ は $O(g)$ に含まれる．(2.1) では，$z\to+\infty$, $z\to-\infty$ が上述の極限である．

(2.1) の性質をもつ関数を **eks α 型**とよぶことにしたのは，exponential に関係があり，重要なパラメーター k, s, α を含むことを簡潔に表わすと考えたからである．たとえば，eks α 型は**エクサ型**，$\mathrm{eks}^{(p)}\alpha$ 型は**エクサ p 型**とでも読んでおけばよいかと思う．

eks α 型の関数のパラメーター k, s, α の値は $z\to+\infty$ と $z\to-\infty$ に対して異なる値をとってもよい．必要なばあいはこれらを添字 $+, -$ で区別する．

［**定理 1**］ ベキ型の超関数は $\mathrm{eks}^{(\infty)}\alpha$ 型である．その eks α 領域Dには制限はない．

（証明） ベキ型の超関数の母関数は（上下両成分とも）$\varphi(z)=(\pm z)^{\alpha}\{\mathrm{Log}(\pm z)\}^{n}$ である．これは

$$\begin{aligned}&\exp[\mathrm{Log}\{(\pm z)^{\alpha}[\mathrm{Log}(\pm z)]^{n}\}]\\&=\exp[\alpha\,\mathrm{Log}(\pm z)+n\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(\pm z)]\\&=\exp[o(z)],\quad z\to\pm\infty\end{aligned}$$

である．したがって，$\varphi(z)$ は eks α 型であって，Dには制限はない．$\varphi(z)$ を何回微分しても，(α, n が異なるだけで) 同じ形の関数が得られるから，$\varphi(z)$ は $\mathrm{eks}^{(\infty)}\alpha$ 型である．したがって，定義3により，ベキ型の超関数は $\mathrm{eks}^{(\infty)}\alpha$ 型である．∎

例 1 a は実数，α, s は複素数とする．このとき

$$\begin{aligned}&e^{az}=\mathrm{eks}^{(\infty)}(\pm\infty),\quad a\leqq 0\\&e^{az^{s}}=\mathrm{eks}^{(\infty)}(\pm\infty),\quad \mathrm{Re}\,s<1\\&e^{-az^{2}}=\mathrm{eks}^{(\infty)}(\pm\infty,-\delta<\arg(\pm z)<\delta),\\&e^{a\sin z}=\mathrm{eks}^{(\infty)}(\pm\infty,-\varepsilon<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon),\\&e^{a\sinh z}=\begin{cases}\mathrm{eks}^{(\infty)}(-\infty), & a>0\\ \mathrm{eks}^{(\infty)}(+\infty), & a<0\end{cases}\\&e^{ia\sinh z}=\mathrm{eks}^{(0)}(\pm\infty,\ 0\leqq\mathrm{Im}(az)<\varepsilon)\end{aligned}$$

が成り立つ．証明は容易である．読者にまかせる．ただ，最後の関係式は注意を要する．つまり，1回微分を行なうと $ia\cosh z\,e^{ia\sinh z}$ となり，$\cosh z$ は $O[\exp\{o(z)\}]$ とは書けない．したがって $e^{ia\sinh z}$ は $\mathrm{eks}^{(0)}\alpha$ 型であるが $\mathrm{eks}^{(1)}\alpha$ 型ではないのである．

§3. Fourier 変換が存在するための十分条件

定理1と上の例1からも明らかなように，実用上現われる関数はたいてい eks α 型である．そこで，以下 eks α 型の関数（超関数）について考えることにする．

[定理 2] $\varphi(z)$ は $0<\mathrm{Im}\,z<A$（Aは正数）で正則な解析関数とする．このとき

（i） $\varphi(z)=\mathrm{eks}(\pm\infty, x)$ ならば，$G(\zeta)=\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ が存在する．

（ii） $\varphi(z)=\mathrm{eks}(\pm\infty, 0<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon)$ ならば，$G(\zeta)$ が存在する．ただし，$\alpha=ia(a_+<0$，または $a_->0)$ でかつ $s\geqq 2$ のばあいは除外する．

（証明） $F(z)=\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)$ は上成分だけであるから，(1.2) は

$$\left.\begin{aligned} G_+(\zeta) &= \int_l \varphi(z)e^{-j\zeta z}dz, \\ G_-(\zeta) &= \int_r \varphi(z)e^{-j\zeta z}dz \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

となる．ただし，l, r は図3に示す積分路である（×印は $\varphi(z)$ の特異点を示す）．$\varphi(z)e^{-j\zeta z}$ は積分路の上で正則であるから，積分の収束性が問題になるのは $z\to\pm\infty$ だけである．

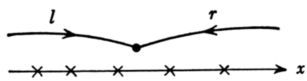


図 3

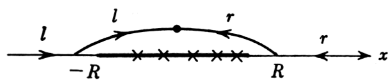


図 4

まず，（i）のばあいを考える．仮定により $\varphi(z)$ は x 軸上の $|x|>R$ で正則であるから，図4のような積分路 l, r をとることができる．また，$z\to\pm\infty$ で

$$\varphi(z)=O[\exp\{jkz+\alpha(\pm z)^s+o(z)\}] \qquad (3.2)$$

である．したがって，$z\to\pm\infty$ のとき

$$\begin{aligned} \varphi(z)e^{-j\zeta z} &= O[\exp\{-jx(\zeta-k)+\alpha(\pm x)^s+o(x)\}] \\ &= O[\exp\{2\pi\eta x+\alpha(\pm x)^s+o(x)\}]. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

$\mathrm{Re}\,\alpha\leqq 0$ であるから $\exp\{\alpha(\pm x)^s\}\leqq 1$．したがって，上式の右辺は

$$O[\exp\{2\pi\eta x+o(x)\}]=O[\exp\{[2\pi\eta+o(1)]x\}]$$

となる．$G_+(\zeta)$ に対しては $\eta>0$，$x\to-\infty$ を，また $G_-(\zeta)$ に対しては $\eta<0$，$x\to+\infty$ を考えればよいから，積分は確かに収束するのである．

つぎに，（ii）のばあいを考える．$\varphi(z)$ は x 軸上で必ずしも正則ではないか

ら，図4のような積分路をとるわけにはいかない．しかし，図3の積分路について $z\to\pm\infty$ のとき

$$\begin{aligned}\varphi(z)e^{-j\zeta z} &= O[\exp\{-jz(\zeta-k)+\alpha(\pm z)^s+o(z)\}]\\ &= O[\exp\{2\pi[\eta x+(\xi-k)y]+\alpha(\pm x)^s(1+iy/x)^s+o(x)\}] \quad (3.4)\end{aligned}$$

の評価式は成り立つ．そこで積分路を x 軸に十分近くとれば，$\{\cdots\}$ 内で $(\pm x)^{s-2}$ の項と $o(x)$ とを省略して

$$\varphi(z)e^{-j\zeta z} = O[\exp\{2\pi\eta x+\alpha(\pm x)^s\pm is\alpha y(\pm x)^{s-1}\}] \qquad (3.5)$$

と考えることができる．Re $\alpha<0$ あるいは $\alpha=0$ のばあいには，(i) と同様の議論で積分の収束性がいえる．Re $\alpha=0$，すなわち $\alpha=ia$ ($a=$ 実数) のばあいには，上の $\{\cdots\}$ の中の第2項は $|\exp\{ia(\pm x)^s\}|=1$ として消え去り，最後の項は $\mp asy(\pm x)^{s-1}$ として生き残る．しかし，もしも $s-1<1$，すなわち $s<2$ であれば，この項も $\{\cdots\}$ 内の第1項 $2\pi\eta x$ に吸収されるので，積分はやはり収束する．また，もし $s\geqq 2$ ならば，最後の項 $\mp asy(\pm x)^{s-1}$ が決定的になる．積分路は上半面 (Im $z=y>0$) にあるから，$x\to+\infty$ に対しては $a_+>0$，$x\to-\infty$ に対しては $a_-<0$ であれば積分は収束する（ここでパラメーター a に添字 $+$，$-$ をつけた）．以上をまとめると定理の (ii) になる．∎

注意　$\varphi(z)$ の x 軸上での特異点がたかだか有限個しかなければ，$x\to\pm\infty$ で $\varphi(z)$ は正則である．したがって $\varphi(z)=\text{eks}(\pm\infty, 0<\text{Im}\, z<\varepsilon)$ の仮定から必然的に $\varphi(z)=\text{eks}(\pm\infty, x)$ が導かれるので，定理の (i) が適用される．定理の (ii) を使わざるを得ないばあいというのは，$\varphi(z)$ の特異点が x 軸上に無限個存在し，しかも $x\to\pm\infty$ まで及んでいるばあいである．$\varphi(z)$ が周期関数，たとえば cosec z のときなどが，その重要な例である．

§4.　$G(\zeta)=\mathfrak{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ の ξ 軸上での正則性

$G(\zeta)=\mathfrak{F}F(z)$ が存在すれば，$g(\xi)=$ H.F. $G(\zeta)$ として $f(x)=$ H.F. $F(z)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ が存在する．上の定理2によって，eks α 型という相当ゆるい条件のもとで $G(\zeta)$ の存在が保証されたわけであるが，つぎに $G(\zeta)$ の ξ 軸上での性質をしらべよう．もしも $G_+(\zeta)$，$G_-(\zeta)$ が ξ 軸上でともに正則であれば，$g(\xi)=G_+(\xi)-G_-(\xi)$ となってはなはだ好都合であろう．

以下，もっぱら上型の超関数，すなわち $F(z)=\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)$ のばあいについて議論するが，結果はもちろん下型の超関数のばあいに読みかえることができる．

Re $\alpha<0$，Re $\alpha=0$，$\alpha=0$ の3つのばあいに分けて考える．

[定理 3] $G(\zeta)=\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ とする．このとき

$$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, x|\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

ならば，$G_-(\zeta)$ は ξ 軸上で正則である．また

$$\varphi(z)=\mathrm{eks}(-\infty, x|\mathrm{Re}\,\alpha<0)$$

ならば，$G_+(\zeta)$ は ξ 軸上で正則である．とくに，$s>1$ ならば，$G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ は整関数である．

[定理 4] $G(\zeta)=\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ とする．このとき

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ 0<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon|\alpha=ia,\ a>0,\ s\geqq 2)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\varepsilon<\mathrm{Im}\,z\leqq 0|\alpha=ia,\ a<0,\ s\geqq 2)\end{cases}$$

ならば，$G_-(\zeta)$ は ξ 軸上で正則である．また

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ -\varepsilon<\mathrm{Im}\,z\leqq 0|\alpha=ia,\ a>0,\ s\geqq 2)\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ 0<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon|\alpha=ia,\ a<0,\ s\geqq 2)\end{cases}$$

ならば，$G_+(\zeta)$ は ξ 軸上で正則である．とくに，$s>2$ ならば，$G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ は整関数である．

[定理 5] $G(\zeta)=\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ とする．このとき

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ 0<\arg z<\delta|\alpha=ia,\ a>0,\ s>1)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z\leqq 0|\alpha=ia,\ a<0, s>1)\end{cases}$$

ならば，$G_-(\zeta)$ は整関数である．また

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ 0\leqq\arg(-z)<\delta|\alpha=ia,\ a>0,\ s>1)\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ -\delta<\arg(-z)<0|\alpha=ia,\ a<0,\ s<1)\end{cases}$$

ならば，$G_+(\zeta)$ は整関数である．

[定理 6] $G(\zeta)=\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ とする．このとき

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ 0<\arg z<\delta|\alpha=0)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z\leqq 0|\alpha=0)\end{cases}$$

ならば，$G_-(\zeta)$ はそれぞれ $\xi<k_+$, $\xi>k_+$ で正則である．また

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ -\delta<\arg(-z)<0|\alpha=0)\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ 0\leqq\arg(-z)<\delta|\alpha=0)\end{cases}$$

ならば，$G_+(\zeta)$ はそれぞれ $\xi<k_-$, $\xi>k_-$ で正則である．

したがって，

$$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z<\delta|\alpha=0)$$

ならば，ξ 軸上での $G_-(\zeta)$ の特異点はたかだか $\xi=k_+$ だけである．また

$$\varphi(z) = \mathrm{eks}(-\infty,\ -\delta < \arg(-z) < \delta \,|\, \alpha = 0)$$

ならば，ξ 軸上での $G_+(\zeta)$ の特異点はたかだか $\xi = k_-$ だけである．

ただし，$k_\pm$ は $\mathrm{eks}(\pm\infty)$ に対するパラメーター k を意味する．

[定理 7]　$G(\zeta) = \mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_-(z)\}$ についても，定理 3 はそのまま成り立つ．定理 4，定理 5，定理 6 では，eks α 領域を示す不等号で

$$0< \ \to 0\leqq, \quad \leqq 0 \to <0, \quad <0 \to \leqq 0, \quad 0\leqq \ \to 0<$$

というおきかえをすればよい．その他は変らない．

（定理 3 の証明）　仮定により，$z \to \pm\infty$ に対して

$$\varphi(z) = O[\exp\{jkz + \alpha(\pm z)^s + o(z)\}]$$

である．したがって，

$$\varphi(z)e^{-j\zeta z} = O[\exp\{-j(\zeta-k)z + \alpha(\pm z)^s + o(z)\}]. \tag{4.1}$$

積分路を x 軸にとると，上式の exp の中の $\{\cdots\}$ は

$$\begin{aligned}\{\cdots\} &= -j(\zeta-k)x + \alpha(\pm x)^s + o(x)\\ &= 2\pi\eta x + \mathrm{Re}\,\alpha\cdot(\pm x)^s + o(x) + p.i.\end{aligned} \tag{4.2}$$

ただし，$p.i.$ は純虚数を意味する．

まず，$G_-(\zeta)$ を考える．積分の収束に関係するのは $x \to +\infty$ である．$s>1$ ならば，(4.2) で第 2 項が（絶対値において）圧倒的に大きい．ところが，仮定により $\mathrm{Re}\,\alpha<0$ であるから，(4.1) は指数関数的に 0 に近づく．それゆえ，ξ, η のいかんにかかわらず積分は収束し，したがって $G_-(\zeta)$ は ζ 平面いたるところで正則，すなわち整関数である．したがって，もちろん ξ 軸上で正則である．

$s = 1$ ならば，$2\pi\eta + \mathrm{Re}\,\alpha < 0$，すなわち

$$\eta < -(\mathrm{Re}\,\alpha)/2\pi \tag{4.3}$$

で積分は収束し，$G_-(\zeta)$ が存在する．(4.3) は ξ 軸を含む領域を表わし，ここで $G_-(\zeta)$ が正則であることがわかる．

$G_+(\zeta)$ についても同様に議論できる．∎

（定理 4 の証明）　(4.1) の $\{\cdots\}$ は

$$\begin{aligned}\{\cdots\} &= -j(\xi+i\eta-k)(x+iy) + ia(\pm x)^s(1+iy/x)^s + o(x)\\ &= 2\pi\{\eta x + (\xi-k)y\} \mp a(\pm x)^{s-1}sy + \cdots + o(x) + p.i.\end{aligned} \tag{4.4}$$

のように表わされる．

まず，$G_-(\zeta)$ を考える．$s>2$ ならば，(4.4) で第 2 項が圧倒的に大きい．それゆえ，積分を収束させるには，$asy>0$ となるような積分路をとればよい．

$a\gtrless 0$ に応じて $y\gtrless 0$ とすればよいが，eks α 領域が，仮定により，それぞれ $0<\mathrm{Im}\,z<\varepsilon$, $-\varepsilon<\mathrm{Im}\,z\leqq 0$ であるから，たしかにそのような積分路が選べる．このばあいも積分路は ξ,η に無関係に選べるから，$G_-(\zeta)$ は整関数である．

$s=2$ ならば，(4.4) の第1項と第2項はまとまって，$x\to+\infty$ に対する主要な項は $2(\pi\eta-ay)x$ となる．したがって

$$\eta<\frac{ay}{\pi} \tag{4.5}$$

を満足するような積分路が選べれば，積分は収束し，$G_-(\zeta)$ が存在する．その際，$ay>0$ であれば，$G_-(\zeta)$ の正則領域 (4.5) は ξ 軸を含むことになる．eks α 領域は，仮定により，このような積分路のとり方を許すのである．

$G_+(\zeta)$ についても議論は同じである．図5は適当な積分路を示す．実線は $a>0$ のばあいを，また破線は $a<0$ のばあいを表わしている．▮

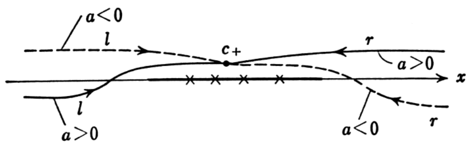


図 5

(定理 5 の証明) まず，$G_-(\zeta)$ を考えよう．(4.1) の $\{\cdots\}$ は，$z=re^{i\theta}$ とおくと，

$$\{\cdots\}=-j(\xi-k+i\eta)re^{i\theta}+iar^se^{is\theta}+o(r) \tag{4.6}$$

となる．仮定により $s>1$ であるから，$\theta\neq 0$ では第2項が圧倒的に大きい．さて，

$$iar^se^{is\theta}=-ar^s\sin s\theta+p.i.$$

であるから，積分を収束させるためには $a\sin s\theta>0$ とすればよい．eks α 領域は，仮定により，このような積分路の選択を許す．そして，その選択は ξ,η に

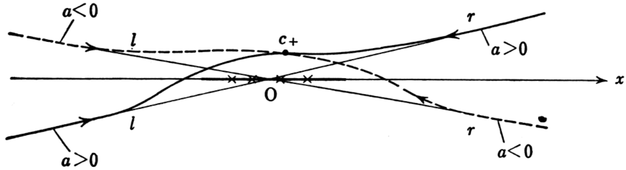


図 6

は無関係であるから，$G_-(\zeta)$ は整関数である．この事情は定理3の $s>1$ のばあい，定理4の $s>2$ のばあいと同様である．

$G_+(\zeta)$ についても同様に議論できる．図6は適当な積分路を示す．∎

（定理6の証明）　$z=re^{i\theta}$ とおくと，(4.1) の $\{\cdots\}$ はこのばあい

$$\begin{aligned}\{\cdots\}&=-j(\xi-k+i\eta)re^{i\theta}+o(r)\\&=2\pi\{(\xi-k)\sin\theta+\eta\cos\theta\}r+o(r)+p.i.\end{aligned}\tag{4.7}$$

となる．積分を収束させるためには，r の係数が負になるような積分路をとればよい．

まず，$G_-(\zeta)$ を考える．上の条件は

$$\eta<(k_+-\xi)\tan\theta\tag{4.8}$$

と書き表わされる．この右辺が正であれば $G_-(\zeta)$ の正則領域は ξ 軸を含むことになる．さて，eks α 領域が $0<\arg z<\delta$ であれば，(4.8) の右辺の θ は $0<\theta<\delta$ と選ぶことができ，したがって $\xi<k_+$ に対して $G_-(\zeta)$ は ξ 軸上で正則となる．また，eks α 領域が $-\delta<\arg z\leqq 0$ であれば，積分路を（x 軸を横切ったあと）$-\delta<\theta<0$ とすることができる．そのばあい，$\xi>k_+$ に対して $G_-(\zeta)$ は ξ 軸上で正則となるのである．

$G_+(\zeta)$ についても議論は同様である．なお，定理の後半は明らかであろう．∎

（定理7の証明）　$\mathcal{F}[\varphi(z),0]$ についての議論をそのまま $\mathcal{F}[0,\varphi(z)]$ についてくりかえせばよい．あるいは，$F(z)=[\varphi(z),0]$ に対して $F(-z)=[0,\varphi(-z)]$，$\mathcal{F}F(-z)=G(-\zeta)=[G_-(-\zeta),\ G_+(-\zeta)]$ となることに注意し，$\varphi(-z)\equiv\psi(z)$，$G(-\zeta)\equiv H(\zeta)=\mathcal{F}[0,\psi(z)]$ とおけば，$\varphi(z)$ と $G(\zeta)$ の関係から $\psi(z)$ と $H(\zeta)$ の関係を導き出すことができる．読者の研究にまかせる．∎

§5.　定理の応用例

以上で eks α 型の超関数の Fourier 変換に関する議論は一応終わることにする．まことにゴタゴタしためんどう臭い議論だとお感じの読者も少くないこととは思うが，これは筆者が，扱える超関数の範囲を欲張って広くとったためである．もしも Lighthill のようにベキ型の超関数に話をかぎれば，議論はもっとすっきりしたものになったであろう．実際，定理1の示すとおり，ベキ型の超関数は eks$^{(\infty)}\alpha$ 型（$\alpha=0$）で，しかもその eks α 領域は無制限なのである．もしも $\varphi(z)$ として $z\to\infty$ でベキ型になるような解析関数だけを扱うことにすれば，定理2～7の内容は一括してつぎの形にまとめられる．

[定理 8] $\varphi(z)e^{-jkz}$(kは実数)が $z\to\infty$ でベキ型の解析関数ならば，$G(\zeta)=\mathfrak{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$が存在し，しかも ξ 軸上では $G_+(\zeta)$，$G_-(\zeta)$ の特異点はそれぞれたかだか $\xi=k_-, \xi=k_+$ にかぎられる．$\mathfrak{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_-(z)\}$ についても同様である．

ただ，ベキ型でない超関数も実用上しばしば現われるので，上のように eks α 型の超関数について知っておくことも必ずしもむだではないと思う．以下に，上に得た諸定理の意味するところを簡単な例についてたしかめてみよう．下の各例で $G(\zeta)=\mathfrak{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ である．

例 2 $\varphi(z)=z, \quad G(\zeta)=-(j\zeta)^{-2}.$

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}, \quad G(\zeta)=-jH(\zeta)\equiv \mathrm{Log}(-\zeta).$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{z+ai}, \quad G(\zeta)=-je^{-2\pi a\zeta}H(\zeta) \quad (a>0).$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}e^{jaz}, \quad G(\zeta)=-H(\zeta-a).$$

これらは簡単なベキ型の超関数の例である．上の3つでは k はすべて0で，$G(\zeta)$ は $\zeta=0$ のみを特異点にもつ．最後の例では $k=a$ である．すなわち，すべて定理8のいうとおりである．

例 3 $\varphi(z)=e^{-az^2}, \quad G(\zeta)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\pi^2\zeta^2/a}\mathbf{1}_+(\zeta).$

$$\varphi(z)=e^{iaz^2}, \quad G(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1+i)e^{-i\pi^2\zeta^2/a}\mathbf{1}_+(\zeta).$$

ただし，$a>0$ である．例1で見たように $e^{-az^2}=\mathrm{eks}(\pm\infty, x)$ であって，$\mathrm{Re}\,\alpha=-a<0$ であるから，定理3が適用される．したがって，$G_+(\zeta), G_-(\zeta)$ はともに整関数のはずである．(実際そうなっている！) つぎに，$e^{iaz^2}=\mathrm{eks}(\pm\infty, \mathrm{D}|\alpha=ia, a>0, s=2)$ (Dは任意) であるから定理5が適用される．したがって，$G_+(\zeta), G_-(\zeta)$ がともに整関数であることがわかる．(たしかにそのとおりである！)

例 4 $\varphi(z)=\dfrac{1}{1+e^z}, \quad G(\zeta)=\pi i\,\mathrm{cosech}\,2\pi^2\zeta\,\mathbf{1}_+(\zeta).$

$\varphi(z)$ は x 軸上で正則であって，$\varphi(x)=e^{-x}-e^{-2x}+\cdots$, $(x\to+\infty)$; $1-e^x+e^{2x}-\cdots$, $(x\to-\infty)$ である．したがって，$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty, x|\alpha=-1, s=1)$; $\varphi(z)=\mathrm{eks}(-\infty, x|\alpha=0, k=0)$ である． 前者から， 定理3により， $G_-(\zeta)$ は整関数， 後者から， 定理6により，$G_+(\zeta)$ はたかだか $\zeta=0$ に特異点をもつことがわかる．(たしかにそのとおりである.) なお，$\varphi(z)=(1/2)(1-\tanh z/2)$ から (7.7.14) を使って上の $G(\zeta)$ を導くことは読者にまかせる．

例 5 $\varphi(z)=\dfrac{1}{1-e^{jz}}, \quad G(\zeta)=-\dfrac{1}{j}\psi(-\zeta).$

ただし，$\psi(\zeta)$ は §6.8 で説明した**2ガンマ関数**である．

$\varphi(z)$ はx軸上の点 $z=n$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$) に1位の極をもつ周期1の周期関数である．Im $z=y>0$ に対しては $|e^{jz}|=e^{-2\pi y}<1$ であるから，

$$\varphi(z) = 1+e^{jz}+e^{2jz}+\cdots$$

のように展開される．その各項は eks α 型 ($\alpha=0$) で，$k=0,1,2,\cdots$ である．定理6を適用すれば，それら各項の Fourier 変換は，$G_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ がともに $\xi=k$ を特異点としてもち得ることがわかる．実際，2ガンマ関数 $\psi(\zeta)$ の特異点は $\zeta=-n$ ($n=0,1,2,\cdots$) であるから，この予想は当っている．

なお，$\mathcal{F}F(z)=G(\zeta)$ のとき $\mathcal{F}\{e^{njz}F(z)\}=G(\zeta-n)$ という一般公式と，$\mathcal{F}\mathbf{1}_+(z)=\mathcal{F}\mathbf{1}(z)=\delta(\zeta)\equiv-1/j\zeta$ とを使って機械的に計算を行なうと

$$\mathcal{F}\frac{1}{1-e^{jz}}\mathbf{1}_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}e^{njz}\mathbf{1}_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(\zeta-n)=-\frac{1}{j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta-n} \tag{5.1}$$

という関係が得られる．ところが，§6.8 で与えた $\psi(\zeta)$ の展開式をすこし変形すると

$$\psi(-\zeta)=-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta-n}+\frac{1}{n+1}\right) \tag{5.2}$$

が得られるので，$G(\zeta)=-\psi(-\zeta)/j$ という関係が上のような機械的な計算によっても見出されることがわかる．(上記の無限級数展開による計算は，厳密にいえば，収束性に問題がある．実は，母関数には解析関数だけの不定性があることを考慮すれば，(5.1) の等号は同等記号 $\cong$ でおきかえるべきである．そうした上で，Σ の中の各項に適当な解析関数をつけ加えて無限級数が収束するようにしてやればよい．(5.2) の Σ の中の $1/(n+1)$ がその付加項に相当する．)

この例では $\varphi(z)=1/(1-e^{jz})$ という周期関数に対応して，(5.1) のようにδ関数（の母関数）が現われている．一般に，周期関数の Fourier 変換はδ関数の和として表わされる．このことについては第10章で詳しく述べる．

§6. ま　と　め

eks α 型の関数および超関数という概念を導入した．これはベキ型の超関数をごく特別なばあいとして含むものであって，実用上現われる重要な関数(超関数)はたいていのばあいこの型に属するものと考えられる．eks α 型の超関数 $f(x)=$H.F. $F(z)$ について，その Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$, $G(\zeta)=\mathcal{F}F(z)$ の存在するための十分条件を与え，さらに $G(\zeta)$ のξ軸上での正則性について研究した．これは $g(\xi)$ の $|\xi|\to\infty$ での漸近的性質を議論する際に重要な役割を演ずる．

9 Fourier 変換——漸近的性質

§1. は じ め に

関数 $f(x)$ が与えられたとき，その Fourier 変換 $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ を求めることは，実際上しばしばおこる問題である．しかし，$f(x)$ が比較的簡単な関数のばあいでも，$g(\xi)$ は必ずしも閉じた形，つまり，既知関数で表わされるとはかぎらない．そのようなばあい，$g(\xi)$ を求めるには，Fourier 変換の定義に立ち帰って $g(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx$ の無限積分を数値的に計算するほかはない．ξ があまり大きくないときには，その数値積分は比較的容易に行なえるが，ξ が大きくなると，被積分関数の振動がはげしくなるので，数値積分はほとんど実行不能になる．もしも，$|\xi|\to\infty$ のときの $g(\xi)$ のふるまいが簡単な既知関数によって表わすことができるとすると，それはきわめて大きい便益をもたらすことになるだろう．以下に述べるのは，このような，$g(\xi)$ の $|\xi|\to\infty$ での漸近的性質を具体的に求める方法である．

§2. Riemann–Lebesgue の定理

まず，**ふつうの関数**の Fourier 変換について成り立つ Riemann–Lebesgue の定理について述べよう．これは，以下の議論の基礎をなす重要な定理である．

[定理 1] **(Riemann–Lebesgue の定理)** ふつうの関数 $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能，すなわち，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ が収束するならば，その Fourier 変換 $g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ は $|\xi|\to\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ である．

(証明) 厳密な証明については Fourier 変換の専門書を見ていただくことにして，ここでは概要のみ示すことにする．Fourier 変換の定義により

$$\begin{aligned}g(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi(x-1/2\xi)}dx\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+\frac{1}{2\xi}\right)e^{-j\xi x}dx\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f\left(x+\frac{1}{2\xi}\right)-f(x)\right\}e^{-i\xi x}dx. \tag{2.1}$$

ただし，上式の2行目は $e^{-i/2}=e^{-\pi i}=-1$ を使って得られる．3行目は，積分変数を $x\to x+1/2\xi$ と変えることによって得られ，4行目を得るには，1行目と3行目を加えて2で割ればよい．さて

$$|g(\xi)|\leqq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{1}{2\xi}\right)-f(x)\right|dx.$$

ここで $|\xi|\to\infty$ とすれば $g(\xi)\to 0$ が得られる．ただし，そのためには，つぎの定理2を使う．∎

[定理 2] $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能であれば

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\varepsilon)-f(x)|\,dx=0$$

が成り立つ．

この定理は直観的に明らかなようであるが，厳密な証明はちょっとめんどうである．(たとえば，N. Wiener: *The Fourier integral and certain of its applications* (Cambridge Univ. Press 1933) を見られたい.)

さて，Riemann–Lebesgue の定理を適用するためには，$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能であることがわかっていなければならない．そのためには，つぎの定理が便利である．

[定理 3] $f(x)$ は $x=x_m(m=1,2,\cdots,M)$ を除けば連続であって，

$$x\to x_m \text{ で } \quad f(x)=O(|x-x_m|^{\alpha_m}),$$
$$|x|\to\infty \text{ で } \quad f(x)=O(|x|^{\alpha_0}),$$

ただし $\mathrm{Re}\,\alpha_m>-1$, $\mathrm{Re}\,\alpha_0<-1$ とする．このとき $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能である．

証明は微積分学でよくご存じのことと思うので，ここでは省略する．

§3. 超関数をふつうの関数と見直すこと

ふつうの関数について成り立つことがらを**超関数**のばあいに拡張して述べるためには，その言い表わし方をはっきり決めておく必要がある．そこで，さし当り必要なことを定義として与えておく．

〔定義 1〕 超関数 $f(x)$ が

（i） $x\to c$ で

$$f(x)\to 0,\ f(x)=O[g(x)],\ f(x)=o[g(x)]$$

である．

（ii）　区間 (a,b) で絶対積分可能である．

（iii）　無限遠 $(x\to+\infty,-\infty)$ で絶対積分可能である．

などというのは，O.F. $f(x)$ がそれぞれ（i），（ii），（iii）の性質をもつことである．とくに（iii）については，適当なある正数 R に対して，

$$\int_R^{\infty}|\mathrm{O.F.}\,f(x)|\,dx,\quad \int_{-\infty}^{-R}|\mathrm{O.F.}\,f(x)|\,dx$$

が収束することである．

以上のように定義すると，Riemann–Lebesgue の定理は超関数のばあいにつぎのように言い表わすことができる．

[定理 4]　超関数 $f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能であるならば，その Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ は $|\xi|\to\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ である．

§4.　$\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$ の漸近的性質

Riemann–Lebesgue の定理——それをいいかえた定理 4 ——の条件，すなわち，$(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能という条件はかなりきびしいものである．たとえば，$f(x)=1, x,\cdots$ などはその条件を満たさない．ところが，$\mathcal{F}1=\delta(\xi)$，$\mathcal{F}x=-\delta'(\xi)/j,\cdots$ であって，$|\xi|\to\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ の関係が成り立っている．このことから，定理 4 の条件はもっとゆるめられるのではないかと想像される．実際，つぎの定理が成り立つのである．

[定理 5]　$F(z)=\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}$，$G(\zeta)=\mathcal{F}F(z)$，$f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$，$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)=\mathrm{H.F.}\,G(\zeta)$ とし，$\varphi(z)$ は x 軸上の任意の有限区間で絶対積分可能とする．このとき

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ x\,|\,\mathrm{Re}\,\alpha<0)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z\leqq 0\,|\,\alpha=0),\end{cases}$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ x\,|\,\mathrm{Re}\,\alpha<0)\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ 0\leqq\arg(-z)<\delta\,|\,\alpha=0)\end{cases}$$

ならば，$\xi\to+\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ である．また

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ x\,|\,\mathrm{Re}\,\alpha<0)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ 0<\arg z<\delta\,|\,\alpha=0),\end{cases}$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ x|\mathrm{Re}\,\alpha<0)\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ -\delta<\arg(-z)<0|\alpha=0)\end{cases}$$

ならば，$\xi\to-\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ である．

（証明） はじめに，eks α 型の関数の定義 8.1 を想い出しておこう．すなわち，$z=\pm\infty$ の近傍で正則で，かつ

$$\varphi(z)=O[\exp\{jkz+\alpha(\pm z)^s+o(z)\}]$$

のように表わされる関数 $\varphi(z)$ を eks α 型というのであった．eks$(+\infty,\ \mathrm{D}|\cdots)$ は，上の表現が $z=+\infty$ の近傍のある領域Dで成り立つことを示す．また，括弧内の縦棒の後の … は，パラメーター k, s, α に関する条件（もしあれば）を示す．一般に，k は任意の実数，$s\geqq 1$，α は $\mathrm{Re}\,\alpha\leqq 0$ の複素数である．

まず，$\xi\to+\infty$ のばあいを考えよう．定理 8.3 と定理 8.6 によれば，証明すべき定理 5 の条件を満たす $\varphi(z)$ に対しては，$G_+(\zeta)$，$G_-(\zeta)$ は ξ 軸上でそれぞれ $\xi>k_-$, $\xi>k_+$ で正則である．したがって，$\xi>\max(k_+,k_-)$ に対して $g(\xi)=G_+(\xi)-G_-(\xi)$ であって，$g(\xi)$ 自身もそこで正則である．それゆえ，$g(\xi)\to 0$ を証明するには，$G_+(\xi)\to 0$, $G_-(\xi)\to 0$ がいえれば十分である．まず，$G_-(\xi)$ を考えよう：

$$G_-(\xi)=\int_r\varphi(z)e^{-j\xi z}dz. \tag{4.1}$$

仮定により $\varphi(z)$ は x 軸上の任意の有限区間で絶対積分可能である．その上，もしも $\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty,\ x|\mathrm{Re}\,\alpha<0)$ であれば，$x\to+\infty$ のとき $\varphi(z)$ は x 軸上で指数関数的に減少する．したがって，積分路 r を x 軸の正の部分にとり，(4.1) を

$$\begin{aligned}G_-(\xi)&=\int_0^\infty\varphi(x)e^{-j\xi x}dx\\&=\int_{-\infty}^\infty\varphi(x)H(x)e^{-j\xi x}dx\\&=\mathcal{F}[\varphi(x)H(x)]\end{aligned} \tag{4.2}$$

と表わすことができる．ただし $H(x)$ は Heaviside 関数である．$\varphi(x)H(x)$ は明らかに $(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能であるから，Riemann–Lebesgue の定理により

$$|\xi|\to\infty \text{ のとき } G_-(\xi)\to 0$$

が成り立つ．

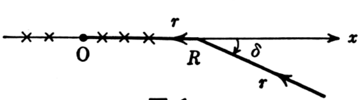


図 1

また，もし $\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z\leqq 0|\alpha=0)$ ならば，積分路 r を図 1

のように選ぶ．そうすると，(4.1)は

$$-G_-(\xi) = G_1(\xi)+G_2(\xi), \tag{4.3}$$

$$G_1(\xi) = \int_0^R \varphi(x)e^{-j\xi x}dx, \tag{4.4}$$

$$G_2(\xi) = \int_0^\infty \varphi(z)e^{-j\xi z}e^{-i\theta}dt, \quad z = R+te^{-i\theta} \tag{4.5}$$

のように書き表わされる．まず，(4.2)について述べたのとまったく同じ理由で

$$|\xi|\to\infty \text{ のとき } \quad G_1(\xi)\to 0 \tag{4.6}$$

が成り立つ．つぎに，$\varphi(z)=\mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z\leqq 0|\alpha=0)$ ならば

$$\varphi(z)e^{-j\xi z}=O[\exp\{-j(\xi-k)z+o(z)\}].$$

ところが

$$\begin{aligned}-j(\xi-k)z+o(z) &= -j(\xi-k)(R+te^{-i\theta})+o(z)\\ &= -2\pi\sin\delta\cdot(\xi-k)t+o(t)+\text{純虚数}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}|G_2(\xi)| &\leqq \int_0^\infty |\varphi(z)e^{-j\xi z}|dt\\ &= \int_0^\infty \exp[-2\pi\sin\delta\cdot(\xi-k)t+o(t)]dt\\ &< \int_0^\infty \exp[\{-2\pi\sin\delta\cdot(\xi-k)+\varepsilon\}t]dt\\ &= \{2\pi\sin\delta\cdot(\xi-k)-\varepsilon\}^{-1}, \qquad \xi>k.\end{aligned}$$

ただし，2行目から3行目に移る際に $o(t)$ を εt でおきかえてある（ε は適当に小さい正数）．これから

$$\xi\to+\infty \text{ のとき } \quad G_2(\xi)\to 0 \tag{4.7}$$

が得られる．(4.3), (4.6), (4.7) をあわせ考えると

$$\xi\to+\infty \text{ のとき } \quad G_-(\xi)\to 0 \tag{4.8}$$

であることがわかる．

$G_+(\xi)$ については積分路 l について上と同様の議論を行えば

$$\xi\to+\infty \text{ のとき } \quad G_+(\xi)\to 0 \tag{4.9}$$

が得られる．これで $\xi\to+\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ であることが証明された．$\xi\to-\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ であることもまったく同様に証明できる．▮

[定理 6] $\varphi(z)$ は x 軸上の任意の有限区間で絶対積分可能で，かつ

$$\varphi(z) = \begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ x|\mathrm{Re}\,\alpha<0)\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z<\delta|\alpha=0),\end{cases}$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}\text{eks}(-\infty,\ x\,|\,\text{Re}\,\alpha<0)\\ \text{eks}(-\infty,\ -\delta<\arg(-z)<\delta\,|\,\alpha=0)\end{cases}$$

であるとすれば，$g(\xi)=\mathfrak{F}[\varphi(x)]_+$ は $|\xi|\to\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ である．

（証明） 上の定理5の仮定の条件をいくぶんきびしくして，結果をまとめたものである．∎

[定理 7] $F(z)=\varphi(z)\mathbf{1}_-(z)$ についても上の定理5は成り立つ．ただし，eks α 領域について，0に関する不等号を

$$\leqq 0 \rightleftarrows <0, \quad 0\leqq \rightleftarrows 0<$$

のようにおきかえるものとする．定理6はそのまま成り立つ．

（証明） 定理5および定理6の証明とまったく同じである．∎

§5. Riemann-Lebesgue の定理の拡張

一般に，母関数 $F(z)=[F_+(z),F_-(z)]$ は $[F_+(z),0]+[0,F_-(z)]$ のように分解することができるから，$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ の ξ 軸上での正則性と $|\xi|\to\infty$ に対する漸近的性質は，それぞれ前の章で得た定理8.3～8.7と上の定理5～7によって知られるわけである．さて，定義8.3によれば，超関数 $f(x)$ が $f(x)=\text{eks}(\pm\infty, x\,|\,\text{Re}\,\alpha<0)$, $\text{eks}(\pm\infty, -\varepsilon<\text{Im}\,z<\varepsilon\,|\,\alpha=ia)$, $\text{eks}(\pm\infty, -\delta<\arg(\pm z)<\delta\,|\,\alpha=0)$ などというのは，$f(x)$ の母関数の上下両成分がともにこれらの eks α 型の関数であるという意味である．そこで，この定義を使うと，定理8.3～8.7をまとめて，つぎの定理が得られる．

[定理 8] 超関数 $f(x)$ が

（i） $f(x)=\text{eks}(\pm\infty, x\,|\,\text{Re}\,\alpha<0)$

であれば，$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ は ξ 軸上で正則である．とくに $s>1$ のばあいは $g(\xi)$ は整関数である．また

（ii） $f(x)=\text{eks}(\pm\infty, -\varepsilon<\text{Im}\,z<\varepsilon\,|\,\alpha=ia, s>2)$,

（iii） $f(x)=\text{eks}(\pm\infty, -\delta<\arg(\pm z)<\delta\,|\,\alpha=ia, s>1)$

であれば，$g(\xi)$ は整関数である．また

（iv） $f(x)=\text{eks}(\pm\infty, -\delta<\arg(\pm z)<\delta\,|\,\alpha=0)$

であれば，$g(\xi)$ は ξ 軸上で，たかだか4個の点 $\xi=k_\pm^{(+)}$, $\xi=k_\pm^{(-)}$ を除いて正則である．ただし，$k_\pm^{(+)}, k_\pm^{(-)}$ はそれぞれ $F_+(z), F_-(z)$ に対する k_+, k_- を意味する．

いまつぎの定義を導入しよう.

〔**定義 2**〕 超関数$f(x)$が eks$(\pm\infty, -\delta<\arg(\pm z)<\delta|\alpha=0)$ の型の超関数と無限遠で絶対積分可能の超関数の 線形結合として表わされるとき，$f(x)$は**無限遠ですなお**であるということにする.

例 1 ベキ型超関数とe^{jkx}の積は，それ自身および任意階微分を含めて，無限遠ですなおである.

この定義を使うと，定理4～7をまとめてつぎの定理が得られる.

[定理 9] (**Riemann-Lebesgue の定理の拡張**) 任意の有限区間で絶対積分可能でかつ無限遠ですなおな超関数$f(x)$の Fourier 変換を$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$とすれば，$|\xi|\to\infty$ のとき$g(\xi)\to 0$である.

注意 Lighthill は，超関数$f(x)$がベキ型超関数とe^{jkx}の積と無限遠で絶対積分可能の超関数との線形結合として表わされるばあい，$f(x)$は‘無限遠で良い性質をもつ (well-behaved at infinity)’と称している．上で定義した‘無限遠ですなおな’超関数はこの概念を拡張したものである．たとえば，$f(x)=e^{a|x|^{1/2}}$, $\sin a|x|^{1/2}$ は無限遠で‘良い性質をもたない’けれども，‘すなお’である.

なお，定理8と定理9を比較するとつぎのことがわかる．定理8の(i)のばあいは$f(x)$が無限遠で絶対積分可能のばあい，(iv)のばあいは$f(x)$が無限遠ですなおなばあいである．それぞれのばあい，定理9によれば，$|\xi|\to\infty$ のとき$g(\xi)\to 0$である．ところが，(ii),(iii) のばあいは，$g(\xi)$は整関数であって，ξ軸上での正則性は保証されるが，$|\xi|\to\infty$ のとき必ずしも$g(\xi)\to 0$であるとはいえない．それは，$f(x)$が無限遠で**すなお**であるとはいえないからである．たとえば

$$f(x)=e^{iax^2},$$

$$g(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}(1+i)e^{-i\pi^2\xi^2/a} \quad (a>0)$$

は(iii)のばあいに属する．そして$g(\xi)$は整関数でξ軸上いたるところ正則であるが，$|\xi|\to\infty$ のとき$g(\xi)\to 0$は成り立たないのである.

[定理 10] $p_m^{(N)}(x)$は$x=x_m$のみを特異点とし，無限遠ですなおな超関数とする．いま，超関数$f(x)$は$x=x_m(m=1,2,\cdots,M)$を除けば正則であって，$x=x_m$を含むある区間で$f^{(N)}(x)-p_m^{(N)}(x)$は絶対積分可能，かつ$f^{(N)}(x)$は無限遠ですなおであるとする．このとき，$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$, $q_m(\xi)=\mathfrak{F}p_m(x)$とすればつぎの式が成り立つ.

$$|\xi|\to\infty \text{ のとき} \qquad g(\xi)=\sum_{m=1}^{M}q_m(\xi)+o(|\xi|^{-N}).$$

（証明）$f_0(x)\equiv f^{(N)}(x)-\sum_{m=1}^{M} p_m{}^{(N)}(x)$ を考える．
これは

$$\{f^{(N)}(x)-p_n{}^{(N)}(x)\}-\sum_{m\neq n} p_m{}^{(N)}(x)$$

と書ける．仮定により，第1項は x_n を含むある区間 I_n で絶対積分可能である．I_n を適当に小さくとり，その中には x_n 以外の特異点が含まれないようにしておく（図2を見よ）．

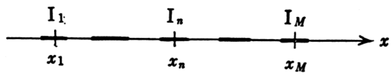


図 2

こうすれば，区間 I_n で第2項は正則であるから，もちろん絶対積分可能である．n は任意であるから，$f_0(x)$ はすべての I_n で絶対積分可能である．$\mathrm{I}_m(m=1,2,\cdots,M)$ 以外では $f_0(x)$ は正則であるから，けっきょく，$f_0(x)$ は任意の有限区間で絶対積分可能である．ところが，仮定により，$f_0(x)$ は無限遠ですなおである．したがって，定理9により，$|\xi|\to\infty$ のとき

$$\mathcal{F}f_0(x)=o(1). \tag{5.1}$$

左辺は

$$\mathcal{F}\frac{d^N}{dx^N}\left\{f(x)-\sum_{m=1}^{M} p_m(x)\right\}=(j\xi)^N\mathcal{F}\left\{f(x)-\sum_{m=1}^{M} p_m(x)\right\}$$
$$=(j\xi)^N\left\{g(\xi)-\sum_{m=1}^{M} q_m(\xi)\right\}$$

と書けるから，(5.1) の両辺を $(j\xi)^N$ で割れば定理の結論が得られる．▮

さて，$q_m(\xi)$ が既知関数であれば，定理10によって $g(\xi)$ の無限遠での漸近表示式が得られるわけである．たとえば，$p_m(x)$ が $x-x_m$ を引数とするベキ型超関数の線形結合のばあいがそうである．すなわち $|x-x_m|^\alpha(\log|x-x_m|)^n$ と $H(x-x_m)$, $H(x_m-x)$, $\mathrm{sgn}(x-x_m)$ の積の形の超関数や $\delta^{(p)}(x-x_m)$ の線形結合（α は任意の複素数，n, p は0または正の整数）は $p_m(x)$ としての資格をそなえている．このばあい，$q_m(\xi)$ は，Fourier 変換の表からただちに読みとれるように，やはりベキ型超関数の線形結合に $e^{-jx_m\xi}$ を掛けたものである．なお，適当な注意を払えば，$M=\infty$ のばあいにも定理10は成り立つ．たとえば $f(x)$ が周期超関数のときなどである．

§6.　$\phi(|x|)$ とベキ型超関数の形式積

ふつうの関数 $\sin x$, $\cos x$, e^{-x} に対して，$\sin|x|, \cos|x|$, $e^{-|x|}$ がなにを意味

するかは読者諸氏もよくご存じのことと思う．さて，超関数 $f(x)$ に対して $f(|x|)$ なる超関数は考えられないだろうか？ $f(x)$ がふつうの関数のばあいには

$$f(|x|)=f(x)H(x)+f(x)H(-x)$$

であるから，$f(x)$ が超関数のばあいにも，この式で $f(|x|)$ が定義されるだろうと一応は考えられる．しかし問題は $f(x)$ と $H(x), H(-x)$ との積である．これまで超関数 $f(x)$ の積として考えられたものは，x 軸上で正則な解析関数 $\varphi(x)$ との**積**および1価解析関数 $\psi(x)$ との**形式積**だけである．$H(x), H(-x)$ は解析関数ではないから，$f(x)$ を任意の超関数とすると上式の右辺は未定義のもので，超関数としては意味をもたないのである．しかし，もしも右辺が超関数として意味をもつものであれば，上式によって $f(|x|)$ なる超関数が新しく得られるわけである．そこで，つぎのような定義をする．

〔**定義 3**〕 $\psi(z)$ を1価の解析関数とする．このとき

$$\psi(|x|)H(x)\overset{\text{def}}{=}\psi(x)\circ H(x),$$

$$\psi(|x|)H(-x)\overset{\text{def}}{=}\psi(-x)\circ H(-x),$$

$$\begin{aligned}\psi(|x|)\begin{cases}1\\ \operatorname{sgn} x\end{cases}&\overset{\text{def}}{=}\psi(|x|)H(x)\pm\psi(|x|)H(-x)\\ &=\psi(x)\circ H(x)\pm\psi(-x)\circ H(-x)\end{aligned}$$

によって $\psi(|x|)H(x)$ などを定義する．さらに，一般に $\psi(|x|)$ とベキ型超関数の**形式積**を

$$\psi(|x|)|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)\overset{\text{def}}{=}\psi(x)\circ|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x), \tag{6.1}$$

$$\psi(|x|)|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(-x)\overset{\text{def}}{=}\psi(-x)\circ|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(-x), \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}&\psi(|x|)|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}\begin{cases}1\\ \operatorname{sgn} x\end{cases}\\ &\overset{\text{def}}{=}\psi(|x|)|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(x)\pm\psi(|x|)|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(-x)\\ &=\psi(x)\circ|x|^{n}(\log|x|)^{\alpha}H(x)\pm\psi(-x)\circ|x|^{\alpha}(\log|x|)^{n}H(-x)\end{aligned} \tag{6.3}$$

で定義する．

（**合理性**） $\psi(z)$ が x 軸上で正則のばあいには，上の定義式の右辺は超関数 $H(x), H(-x)$ と解析関数 $\psi(x)$, $\psi(-x)$ との**積**として明確な意味をもつ．x 軸上に特異点（このばあい極である）をもつばあいでも，**形式積**として確定す

る．したがって，左辺は超関数としてはっきり定義される．∎

上の定義で，$\phi(x)$ が $x=0$ で正則のばあいには，形式積はふつうの積になる．

注意 実は，2つの超関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ の特異点が一致しないばあいには $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の積 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ を合理的に定義することができる．それには，$f_1(x)$ の特異点 $x=x_m^{(1)}(m=1,2,\cdots)$ では $f_2(x)$ は正則，また $f_2(x)$ の特異点 $x=x_n^{(2)}(n=1,2,\cdots)$ では $f_1(x)$ は正則であるから，各特異点の近傍では $f_1(x)\cdot f_2(x)$ が超関数と解析関数の積として定義されるという事実を利用する．これについて詳しくは第12章で述べる．

例 2 $f(x)=\dfrac{1}{|x|-a}$, $a>0$

$f(x)$ をふつうの関数と考えると，$x=0$, $x=\pm a$ が特異点である．$x=\pm a$ では $f(x)$ は絶対積分可能でないから，$f(x)$ をそのまま超関数と見直すことはできない．しかし，定義3を使うと，

$$f(x)=\frac{1}{x-a}H(x)-\frac{1}{x+a}H(-x) \tag{6.4}$$

と解釈することができる．これは $x=0$, $\pm a$ を特異点とする超関数である．これらの特異点の近くで $f(x)$ はつぎのように表わされる：

$$f_1(x)=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{a^n}\quad(x\to 0),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{x-a}\quad(x\to a),$$

$$f_3(x)=-\frac{1}{x+a}\quad(x\to -a).$$

Fourier 変換の表から

$$\mathcal{F}|x|^n=\begin{cases}\mathcal{F}x^n=\dfrac{\delta^{(n)}(\xi)}{(-j)^n}, & n=\text{偶数}\\[2ex] \mathcal{F}\{x^n\operatorname{sgn}x\}=2\dfrac{n!}{(j\xi)^{n+1}}, & n=\text{奇数}\end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{x^{-1}\}=-\pi i\operatorname{sgn}\xi.$$

したがって，定理10により，$|\xi|\to\infty$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x)&\sim-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^{(2n)}(\xi)}{(-ja)^{2n}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(ja\xi)^{2(n+1)}}-\pi i(e^{-ja\xi}-e^{ja\xi})\operatorname{sgn}\xi\\&\sim-2\pi\sin(2\pi a|\xi|)-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(ja\xi)^{2(n+1)}}\end{aligned} \tag{6.5}$$

が得られる．記号 ～ は漸近展開であることを示す．$\delta^{(2n)}(\xi)$ の項を落したのは，$\xi\neq 0$ ではこれらが0だからである．

例 3 $f(x)=\dfrac{1}{||x|-a|}$, $a>0$

このばあいも，$f(x)$ はふつうの関数として $x=0, \pm a$ を特異点にもつ．これらの特異点

の近くで $f(x)$ はつぎのように表わされる：

$$f_1(x)=\frac{1}{a-|x|}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{a^n}\quad(x\to 0),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{|x-a|}\quad(x\to a),$$

$$f_3(x)=\frac{1}{|x+a|}\quad(x\to -a).$$

$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は超関数である．各特異点の近くでこれらの超関数と一致するような超関数が $f(x)$ であると解釈することによって，定理 10 が適用されることになる．

$$\mathfrak{F}|x|^{-1}=\mathfrak{F}\{x^{-1}\operatorname{sgn}x\}=-2(\log|2\pi\xi|+\gamma)$$

を使って例 2 と同様の計算を行なうと

$$\mathfrak{F}f(x)\sim -4(\log|2\pi\xi|+\gamma)\cos 2\pi a\xi+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(ja\xi)^{2(n+1)}}\tag{6.6}$$

が得られる．

例 4　$f(x)=|x|^{\nu}J_{\nu}(|x|)$

$J_{\nu}(z)$ は Bessel 関数で

$$J_{\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2n}\tag{6.7}$$

のように展開される．$\sum_{n=0}^{\infty}$ は z の整関数である．したがって，$f(x)$ は $x=0$ のみを特異点にもつ．さて，$\operatorname{Re}\nu>-1/2$ ならば $f(x)$ は $x=0$ の近くで絶対積分可能であるから，そのまま超関数と見直すことができる．$\operatorname{Re}\nu\leqq -1/2$ のばあいには，定義 3 を使って

$$f(x)=|x|^{2\nu}\cdot\frac{1}{|x|^{\nu}}J_{\nu}(|x|)\tag{6.8}$$

と考えれば超関数になる．すなわち $|x|^{-\nu}J_{\nu}(|x|)$ は x^2 のベキ級数として x の解析関数であって，それと超関数 $|x|^{2\nu}$ の積として $f(x)$ が表わされているからである．(6.7) を考えると，$f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{\nu}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{2(n+\nu)}\tag{6.9}$$

のようにベキ型超関数の和と見なすことができる．また，Bessel 関数の漸近展開式：

$$J_{\nu}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)P_1\left(\frac{1}{z}\right)+\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)P_2\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

（ただし $P_1(z)$, $P_2(z)$ は z のベキ級数）から，$f(x)$ が無限遠ですなおであることがわかる．したがって，定理 10 が適用できる．Fourier 変換の表によれば，$2\nu\neq$ 整数 のとき

$$\mathfrak{F}|x|^{2(n+\nu)}=2\cos\pi\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+2\nu+1)|2\pi\xi|^{-(2n+2\nu+1)}$$

である．したがって，(6.9) から

$$\mathfrak{F}f(x)\sim -\frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\sin\pi\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{|2\pi\xi|^{2n+2\nu+1}}\tag{6.10}$$

が得られる．ただし，Γ 関数の‘2 倍公式’

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma(z) \tag{6.11}$$

が使ってある．

さて，$f(x)$ を**ふつう**の関数として**ふつう**の定義にしたがってFourier変換を求めようとすると，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\xi x}dx$ の収束性が要求されるから，$x=0$ での収束性から $\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$ が，また $|x|\to\infty$ での収束性から $\mathrm{Re}\,\nu<1/2$ が要求される．つまり $-1/2<\mathrm{Re}\,\nu<1/2$ が $\mathcal{F}f(x)$ の存在のために必要である．ところが，$f(x)$ が無限遠で絶対収束であるためには $\mathrm{Re}\,\nu<-1/2$ でなければならない．それゆえ，$f(x)$ をふつうの関数と考えたのでは Riemann-Lebesgue の定理は適用できないのである！　定理9によれば，$\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$ でありさえすれば，$|\xi|\to\infty$ のとき $g(\xi)\to 0$ が保証されている．(6.10) の結果はたしかにそれを裏書きしている．これから見ても，定理9が Riemann-Lebesgue の定理の実質的な拡張になっていることが理解されるであろう．

$\mathrm{Re}\,\nu<-1/2$ のばあいには，(6.10) の漸近展開式のはじめの何項かは $|\xi|\to\infty$ のとき ∞ になる．しかし n 番目以降 $(n>-(\mathrm{Re}\,\nu+1/2))$ は0になるのである．

以上は $\nu\neq$ 半整数 のばあいの議論である．$\nu=$ 半整数 のばあいも上と同様に議論することができる．読者の研究にまかせる．

なお，$\nu\neq$ 半整数のばあい

$$\mathcal{F}\{|x|^{\nu}J_{\nu}(|x|)\}=\frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}\,|4\pi^2\xi^2-1|^{\nu+1/2}}\times\begin{cases}1, & |2\pi\xi|<1\\ -\sin\pi\nu, & |2\pi\xi|>1\end{cases} \tag{6.12}$$

が成り立つことを注意しておこう．(6.12) が (6.10) の展開を与えることは容易にたしかめられるだろう．

§7. $\mathcal{F}[\varphi(x)]_{\pm}$ の漸近的性質

超関数 $f(x)$ の無限遠 $x\to\pm\infty$ での性質を eks α 型というように指定するだけでも Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ の正則性および無限遠 $\xi\to\pm\infty$ での性質をかなり知ることができた．上・下型の超関数 $f(x)=[\varphi(x)]_{\pm}$ については，$\varphi(z)$ の正則領域に関する情報を考慮することによって，$g(\xi)$ についてもうすこし精密な知識が得られる．すなわち，つぎの定理が成り立つ．

[定理 11]　$\varphi(z)$ は $A<\mathrm{Im}\,z<B\,(A\leqq 0\leqq B)$ で正則で，かつ $z\to\pm\infty$ のとき

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(+\infty,\ A\leqq\mathrm{Im}\,z\leqq B\,|\,\mathrm{Re}\,\alpha<0),\\ \mathrm{eks}(+\infty,\ -\delta<\arg z<\delta\,|\,\alpha=0),\end{cases}$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}\mathrm{eks}(-\infty,\ A\leqq\mathrm{Im}\,z\leqq B\,|\,\mathrm{Re}\,\alpha<0),\\ \mathrm{eks}(-\infty,\ -\delta<\arg(-z)<\delta\,|\,\alpha=0)\end{cases}$$

であるとする．このとき，$g(\xi)=\mathcal{F}[\varphi(x)]_{\pm}$ とすれば，

$$g(\xi)=\begin{cases} o(e^{2\pi A'\xi}), & \xi\to+\infty \quad (A<A'<0) \\ o(e^{2\pi B'\xi}), & \xi\to-\infty \quad (0<B'<B) \end{cases}$$

が成り立つ．A', B' はいかほど A, B に近くとってもよい．（すなわち，実質的に $A'=A$, $B'=B$ と考えることができる．）また，$A=0$ ならば A' は存在せず，$B=0$ ならば B' は存在しない．

（証明）まず，$A<0<B$ のばあいを考える．このばあい

$$[\varphi(x)]_{+}=[\varphi(x)]_{-}=\varphi(x)$$

である．定理 7.13 によれば

$$\mathfrak{F}\varphi(x)=e^{-jc\xi}\mathfrak{F}\varphi(x+c) \quad (A<\mathrm{Im}\,c<B) \tag{7.1}$$

である．解析関数 $\varphi(z+c)$ の x 軸上での性質を調べよう．x 軸上では $\mathrm{Im}(z+c)=\mathrm{Im}\,c$ であるから，$A<\mathrm{Im}\,c<B$ でありさえすれば仮定により $\varphi(z+c)$ は正則である．したがって，任意の有限区間で $\varphi(z+c)$ はもちろん絶対積分可能である．つぎに，無限遠 $x\to\pm\infty$ での様子を調べよう．仮定により $\varphi(z)$ は eks α 型であるから，

$$\begin{aligned}\varphi(z+c)&=O[\exp\{jk(z+c)+\alpha[\pm(z+c)]^{s}+o(z+c)\}]\\&=O[\exp\{jkz+\alpha[\pm(z+c)]^{s}+o(z)\}]\end{aligned}$$

と表わすことができる．さて，もし $\mathrm{Re}\,\alpha<0$ ならば，$\exp\{\cdots\}$ の括弧内の第2項により $\varphi(z+c)$ は $x\to\pm\infty$ で絶対積分可能である．また，もし $\alpha=0$ ならばその項は消え去る．いずれにしても $\varphi(x+c)$ は**無限遠ですなお**である．したがって定理9（Riemann–Lebesgue の定理の拡張）により

$$\mathfrak{F}\varphi(x+c)=o(1), \qquad |\xi|\to\infty \tag{7.2}$$

が成り立つ．上述の仮定 $A<\mathrm{Im}\,c<B$ が満足されるように，

$$c=iB' \quad (0<B'<B)$$

と選ぶと，(7.1), (7.2) により

$$\mathfrak{F}\varphi(x)=o(e^{2\pi B'\xi}), \qquad \xi\to-\infty \tag{7.3}$$

が得られる．（$\xi\to+\infty$ のばあいを捨てたのは，$e^{2\pi B'\xi}\to\infty$ となって評価式としては無価値だからである．）

また

$$c=iA' \quad (A<A'<0)$$

と選ぶと，

$$\mathfrak{F}\varphi(x)=o(e^{2\pi A'\xi}), \quad \xi\to+\infty \tag{7.4}$$

が得られる．

つぎに，$A=0$ のばあいを考える．このばあい $[\varphi(x)]_-$ は考えられない．そして (7.3) に対応して

$$\mathcal{F}[\varphi(x)]_+ = o(e^{2\pi B'\xi}), \quad \xi\to-\infty$$

が得られる．同様に，$B=0$ のばあいは $[\varphi(x)]_+$ は考えられず，(7.4) に対応して

$$\mathcal{F}[\varphi(x)]_- = o(e^{2\pi A'\xi}), \quad \xi\to+\infty$$

が得られる．評価を精密にするには，A', B' を A, B にできるだけ近くとること，しかし $A'=A$, $B'=B$ とすることはできないことなどは上の議論から明らかであろう．■

例 5　$\mathcal{F}\dfrac{1}{x+ai}=-je^{-2\pi a\xi}H(\xi), \quad a>0$

これについて定理 11 を確かめよう．

$$\frac{1}{x+ai}=\varphi(x), \quad \varphi(z)=\frac{1}{z+ai}.$$

このばあい，$A=-a$, $B=+\infty$ である．したがって，$A'=-a'(0<a'<a)$, $B'=R(\gg 1)$ とすることができる．定理 11 によれば

$$g(\xi)=\begin{cases} o(e^{-2\pi a'\xi}), & \xi\to+\infty \\ o(e^{2\pi R\xi}), & \xi\to-\infty \end{cases}$$

であるが，たしかにそのとおりである．

例 6　$\mathcal{F}\left\{\dfrac{\sinh 2\pi ax}{\sinh \pi x}\right\}=\dfrac{\sin 2\pi a}{\cosh 2\pi\xi+\cos 2\pi a}, \quad -1<2a<1$

$x\to\pm\infty$ のとき

$$\varphi(z)\equiv\frac{\sinh 2\pi az}{\sinh \pi z}\to\exp[\pm(2a-1)\pi z].$$

したがって，$\varphi(z)=\mathrm{eks}(\pm\infty|\alpha=(2a-1)\pi, s=1)$ である．また，$\varphi(z)$ は $-1<\mathrm{Im}\, z<1$ で正則である．したがって $A'=-(1-\varepsilon)$, $B'=1-\varepsilon$ (ε は任意に小さい正数) と選ぶことができる．定理 11 によれば

$$g(\xi)=\begin{cases} o(e^{-2\pi(1-\varepsilon)\xi}), & \xi\to+\infty \\ o(e^{2\pi(1-\varepsilon)\xi}), & \xi\to-\infty \end{cases}$$

となるはずであるが，たしかにそうなっている．

§8.　上(下)超関数と左(右)超関数

定理 11 によれば，$[\varphi(x)]_\pm$ の形の超関数 $f(x)$ は，$\varphi(z)$ の正則領域が広ければ広いほど，つまり A, B の絶対値が大きいほど，$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ が $|\xi|\to\infty$ で 0 になるなり方が急速であることがわかる．そこで，$A\to-\infty$, $B\to+\infty$ のと

きどうなるかを考えてみよう．上の例5，すなわち $\mathcal{F}(x+ai)^{-1}=-je^{-2\pi a\xi}H(\xi)$，$(a>0)$ では，$B=+\infty$ であって，$g(\xi)$ は $\xi<0$ に対して恒等的に0であった．これは0になるなり方が極端にはげしいことに対応している．

さて，つぎの定理が成り立つ．

[定理 12] 上超関数 $[\varphi(x)]_+$ の $\varphi(z)$ が

$$\varphi(z)=\mathrm{eks}(\infty,-\delta<\arg z<\pi+\delta|\alpha=0)$$

であれば，

$$\xi<k \text{ に対して } \quad g(\xi)=\mathcal{F}[\varphi(x)]_+=0$$

である．また，下超関数 $[\varphi(x)]_-$ の $\varphi(z)$ が

$$\varphi(z)=\mathrm{eks}(\infty,-\pi-\delta<\arg z<\delta|\alpha=0)$$

であれば

$$\xi>k \text{ に対して } \quad g(\xi)=\mathcal{F}[\varphi(x)]_-=0$$

である．

（証明） まず，上超関数のばあいを考える．$\mathcal{F}\{\varphi(z)\mathbf{1}_+(z)\}=G(\zeta)$ とすれば

$$[G_+(\zeta),G_-(\zeta)]=\left[\int_l,\int_r\right]\varphi(z)e^{-j\zeta z}dz \tag{8.1}$$

である．仮定により，$\varphi(z)$ は上半平面で正則で，かつ eks α 型 $(\alpha=0)$ であるから，積分路を

$$l:\ z=iR-te^{i\delta},\quad r:\ z=iR+te^{-i\delta}$$

のように選ぶことができる．ただし，t は∞から0まで変化する．（これらは点 $z=iR$ を通り x 軸とそれぞれ角 δ および $-\delta$ をなす半直線である．）そして

$$\varphi(z)=O[\exp\{jkz+o(z)\}],\qquad z\to\infty$$

である．したがって，l に沿っては

$$\begin{aligned}|\varphi(z)e^{-j\xi z}|&<C|\exp\{-j(\xi-k)z+o(z)\}|\\&\leqq C|\exp[-\{j(\xi-k)+i\varepsilon\}(iR-te^{i\delta})]|\\&=C\exp[\{2\pi(\xi-k)+\varepsilon\}(R-t\sin\delta)]\end{aligned} \tag{8.2}$$

が成り立つ．ただし，C は適当な正の定数，ε は任意に小さい正数で $o(z)$ を $i\varepsilon z$ でおきかえるために使ったものである．

さて

$$\begin{aligned}|G_+(\xi)|&=\left|\int_l\varphi(z)e^{-j\xi z}dz\right|\\&\leqq\int_0^\infty|\varphi(z)e^{-j\xi z}|dt\end{aligned}$$

である．(8.2) の評価式を代入して積分を実行し，$R\to\infty$ の極限を考えれば，$\xi<k$ に対して $G_+(\xi)=0$ でなければならないことが容易にわかる．

積分路 r について同様の考察を行なえば，$\xi<k$ に対して $G_-(\xi)=0$ であることがわかる．それゆえ $g(\xi)=G_+(\xi)-G_-(\xi)=0$ が $\xi<k$ に対して成り立つのである．

下超関数 $[\varphi(x)]_-$ についても，議論はまったく同様である．▮

この定理は定理 7.8，すなわち，左(右)超関数の Fourier 変換が存在すれば，それは上(下)超関数である，というのに対応するものである．

実際，定理 12 と定理 7.8 の内容を簡単にいえば，Fourier 変換に際して超関数の型は，図 3 に示すように，時計回りに変化するということである．これをおぼえておくと，いろいろのばあいに便利なことが多い．ただ，上(下)超関数については定理 12 で述べられた制限のつくことに注意しなければならない．

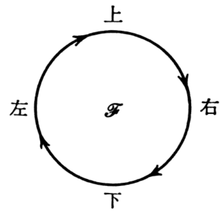


図 3

例 7　$f(x)=H(x)$ (右超関数) から出発して，つぎつぎに Fourier 変換を行なってみよう．

$$\mathcal{F}H(x)=\left[\frac{1}{j\xi}\right]_-=\frac{1}{j\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{j\xi}\right]_-=H(-x),$$

$$\mathcal{F}H(-x)=-\left[\frac{1}{j\xi}\right]_+=-\frac{1}{j\xi}+\frac{1}{2}\delta(\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[-\frac{1}{j\xi}\right]_+=H(\xi).$$

すなわち，図 3 の変換関係が成り立っている．

例 8　$\mathcal{F}\dfrac{\sin 2\pi ax}{\pi x}=H(\xi+a)-H(\xi-a)$

これは公式 (5.5.9) である．$\varphi(z)=(\sin 2\pi az)/\pi z$ は整関数であるから，$\varphi(x)$ は上超関数かつ下超関数である．

$$\varphi(z)=\frac{e^{jaz}}{jz}-\frac{e^{-jaz}}{jz}$$

と分解してみると，右辺の 2 項はともに定理 12 の条件を満足している．したがって $g(\xi)=\mathcal{F}\varphi(x)$ は右超関数かつ下超関数，すなわち中央超関数でなければならない．たしかにそ

のとおりである.

例 9 $\mathfrak{F}e^{-ax^2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\xi^2/a}$, $\mathfrak{F}e^{iax^2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}(1+i)e^{-i\pi^2\xi^2/a}$.

ただし, $a>0$ とする. e^{-ax^2}, e^{iax^2} はともに整関数である. したがって e^{-ax^2}, e^{iax^2} はともに上かつ下超関数である. しかし, 上式の右辺から明らかなように, その Fourier 変換は右超関数でも左超関数でもない. なぜだろう?

それは, これらの超関数が定理 12 の条件, すなわち eks α 型 ($\alpha=0$) の条件を満足しないからである. しかし, e^{-ax^2} の方は定理 11 の eks α 型 (Re $\alpha<0$) の条件を満たしているので, 定理 11 に現われる定数 A', B' の絶対値を非常に大きくとることによって, $|\xi|\to\infty$ で $g(\xi)$ がきわめて急速に 0 になることが期待される. 実際そのとおりである. ($|\xi|\to\infty$ のとき, どんなに大きい A をとっても, $e^{-\xi^2}=o(e^{-A|\xi|})$ であることに注意!) 一方, $\mathfrak{F}e^{iax^2}$ は $|\xi|\to\infty$ のとき激しく振動するだけで, 0 には近づかない. これは e^{iax^2} が eks α 型 ($\alpha=$ 純虚数) であって, 定理 11 の条件を満たさないからである.

§9. $\mathfrak{F}f'(x)$ から $\mathfrak{F}f(x)$ へ

$g(\xi)=\mathfrak{F}f(x)$ がすでに知られているとき, $\mathfrak{F}f'(x)$ は

$$\mathfrak{F}f'(x)=j\xi\, g(\xi) \tag{9.1}$$

としてただちに見出される. 逆に, $\mathfrak{F}f'(x)$ が知られているばあいに $\mathfrak{F}f(x)$ を求めるにはどうすればよいだろうか? 実は, これは §3.16 で論じた問題の特別なばあいである. すなわち, 定理 3.21 によれば, (9.1) から

$$g(\xi)=\frac{1}{j\xi}\circ\mathfrak{F}f'(x)+C\delta(\xi) \tag{9.2}$$

が得られるのである. ただし, ∘ 印は §3.9 で定義された**形式積**を意味する. また, C は任意定数である.

(9.2) によって $g(\xi)$ を求めるには, (i) (9.2) の右辺第 1 項の形式積で表わされた超関数を既知の超関数で表わすこと, (ii) 未定定数 C の値を決定すること, の 2 つの手続きが必要である. 第 1 の手続きは, 下の例で見られるように, ごく簡単である. それが終れば, 第 2 の手続きは, Fourier 変換の漸近的性質を利用することによって遂行される. すなわち, (9.2) の右辺の特異性, つまり $g(\xi)$ の特異性がわかるから, その Fourier 変換 $\mathfrak{F}g(\xi)=f(-x)$ の $|x|\to\infty$ での漸近形がわかり, したがってそれが与えられた $f(x)$ の漸近形と適合するように C をきめればよいのである.

以上の手続きを具体例で示そう.

例 10　つぎの結果を導け.

$$\mathcal{F}\log(2\cosh\pi x) = -\frac{1}{2\xi}\operatorname{cosech}\pi\xi, \tag{9.3}$$

$$\mathcal{F}\log(2|\sinh\pi x|) = -\frac{1}{2\xi}\coth\pi\xi, \tag{9.4}$$

$$\mathcal{F}\log(1+e^{2\pi x}) = -\frac{1}{2\xi}\operatorname{cosech}\pi\xi+\frac{i}{2}\delta'(\xi), \tag{9.5}$$

$$\mathcal{F}\log|1-e^{2\pi x}| = -\frac{1}{2\xi}\coth\pi\xi+\frac{i}{2}\delta'(\xi). \tag{9.6}$$

まず

$$g(\xi) = \mathcal{F}\log(2\cosh\pi x)$$

を考えよう. (9.1) を適用すると,

$$\begin{aligned} j\xi g(\xi) &= \mathcal{F}\{\pi\tanh\pi x\} \\ &= -\pi i\operatorname{cosech}\pi\xi. \qquad \because\ (7.7.14) \end{aligned}$$

$$\therefore\ g(\xi) = -\frac{1}{2\xi}\circ\operatorname{cosech}\pi\xi+C\delta(\xi). \tag{9.7}$$

右辺の第1項は1価解析関数どうしの形式積であるから, ふつうの積である(定義 3.7 を見よ). したがって, $g(\xi)$ の特異点は $\xi=0$ だけで, そこでは

$$g(\xi) \sim -\frac{1}{2\pi\xi^2}+C\delta(\xi).$$

したがって

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mathcal{F}g(\xi) \\ &\sim \pi x\operatorname{sgn}x+C, \quad |x|\to\infty. \end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(e^{\pi x}+e^{-\pi x}) = \log\{e^{\pi|x|}(1+e^{-2\pi|x|})\} \\ &= \pi|x|+O(e^{-2\pi|x|}), \quad |x|\to\infty. \end{aligned}$$

これを上の $f(-x)$ の漸近形と比較すれば $C=0$ であることがわかる. けっきょく, (9.7) は (9.3) となる.

(9.4) も同様の方法で得られる. (読者の演習にまかせる.) (9.5) を得るには,

$$\begin{aligned} \log(1+e^{2\pi x}) &= \log(e^{-\pi x}\cdot 2\cosh\pi x) \\ &= -\pi x+\log(2\cosh\pi x) \end{aligned}$$

に注意し, $\mathcal{F}x = -j^{-1}\delta'(\xi)$ と (9.3) とを使えばよい. (9.6) についても同様である.

§10.　ま　と　め

超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ の $|\xi|\to\infty$ での漸近的性質を調べた. まず, ふつうの関数に対する Riemann–Lebesgue の定理から出発して, これを超関数のばあいにいいかえた. つぎに, eks α 型の超関数の Fourier 変換の漸近的性質から示唆されて, **無限遠ですなお**という新しい概念を導入した.

ベキ型の超関数と e^{ikx} の積は，それ自身および任意階微分を含めて，無限遠ですなおである．そのほか，実用上現われる超関数はたいていのばあい無限遠ですなおである．この概念の導入によって Riemann–Lebesgue の定理は実質的に拡張され，種々の関数(超関数)の Fourier 変換の漸近展開を具体的に見出すことが可能になる．最後に，上(下)型の超関数および上(下)超関数の Fourier 変換の漸近的性質については，さらに精密な評価式が得られた．とくに興味があるのは，Fourier 変換に際して，超関数の型が，上 → 右 → 下 → 左 → 上 のように時計回りに変化することである．なお，Fourier 変換の漸近的性質を利用することによって，$\mathcal{F}f(x)$ の計算を（ばあいによっては）より簡単な $\mathcal{F}f'(x)$ の計算に帰着させられることを知った．

10 周期超関数と Fourier 級数

§1. はじめに

前章までで超関数に関する一般的な議論は一応終った．本章以降はこの一般論を基礎として種々の応用を試みる．その際，必要に応じて一般論の補足も行なってゆくことにする．とくに本章では周期超関数を考察する．このばあい，Fourier 級数の理論が自然なかたちで Fourier 変換の理論に吸収されることが見られるだろう．まず，一般論の補足として，標準母関数の概念を説明する．

§2. 標準母関数

区間 $a<x<b$ で定義された超関数 $f(x)$ を考えよう．これは，x 軸上の 2 点 $z=a$, $z=b$ を通る閉曲線 C と x 軸とで囲まれた 2 つの領域 D_+, D_- で正則な解析関数の 1 対 $[F_+(z), F_-(z)]$ を考えることと同じである(図 1)．$F(z)=[F_+(z), F_-(z)]$ は $f(x)$ の母関数である．

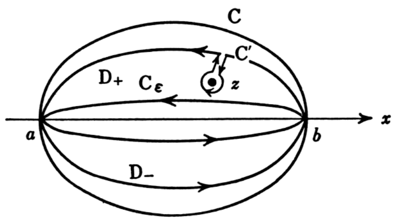


図 1

さて

$$\tilde{F}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{j}\int_a^b \frac{f(x)}{x-z}dx = -\frac{1}{j}\int_{C_\varepsilon} \frac{F(t)}{t-z}dt \qquad (2.1)$$

で定義される $\tilde{F}(z)$ を考えよう．z が x 軸上になければ，$1/(x-z)$ は x の解析関数である．それゆえ $f(x)/(x-z)$ は超関数 $f(x)$ と解析関数 $1/(x-z)$ の積として超関数であるから，(2.1) 式の中辺は超関数の定積分としてはっきりした意味をもつ．この定積分を母関数を使って表わしたのが，(2.1) の右辺である．ただし，積分路 C_ε は，図 1 に示すように，実数軸を 2 点 $t=a$, $t=b$ で切り，かつ点 $t=z$ を内部に含まないような閉曲線である．(つまり C_ε としては非常に幅のせまい閉曲線をとればよい．(図 1 は z 平面を示すが，(2.1) 式で

は積分変数として z の代りに t が使ってある.) ただ注意しなければならないのは, (2.1) の右辺の積分が存在するためには, $F(t)$ が $t=a, t=b$ で正則, あるいは積分可能でなければならないことである.

いま, Cの内部にCに近く閉曲線 C′ をとり, 積分路 C_ε を変形して C′ にする. その際, 被積分関数 $F(t)/(t-z)$ の特異点 $t=z$ (これは1位の極で, 留数は $F(z)$ である) を通過するから, (2.1) は

$$\tilde{F}(z) = F(z) + \varphi(z), \tag{2.2}$$

$$\varphi(z) = -\frac{1}{j}\int_{C'}\frac{F(t)}{t-z}dt \tag{2.3}$$

となる. さて, $\varphi(z)$ を z の関数と考えると, これは C′ の内部の領域で正則な解析関数である. ($(t-z)^{-1}$ は z の解析関数で, z が C′ 上に来ないかぎり正則である. $\varphi(z)$ は $(t-z)^{-1}$ の線形結合として正則である!) すなわち, $\varphi(z)$ は区間 (a,b) を含む領域で正則である. したがって, 区間 (a,b) で定義された超関数に対する母関数としては $\tilde{F}(z)$ と $F(z)$ とは**同等**である.

さて, (2.1) の右辺の形からわかるように, $\tilde{F}(z)$ は, C_ε 上に z が来ないかぎり, z の解析関数である. したがって, $\tilde{F}(z)$ は C_ε の外部で正則である. ところが, C_ε は区間 (a,b) にいかほどでも近くとることができるから, けっきょく $\tilde{F}(z)$ は区間 (a,b) に沿って切目を入れた z 平面で1価正則の解析関数を表わすことになる. そこで, $\tilde{F}(z)$ を母関数とする超関数

$$\tilde{f}(x) = \text{H.F.}\,\tilde{F}(z) \tag{2.4}$$

を考えると, $\tilde{f}(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で定義され, かつ

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x<a,\ x>b \end{cases} \tag{2.5}$$

となるような超関数であることがわかる. すなわち, 記号的に

$$\tilde{f}(x) = f(x)H(x\,;a,b) \tag{2.6}$$

と表わすことができる. このように, $\tilde{F}(z)$ は $f(x)$ の母関数としては $F(z)$ と同等であるが, 区間 (a,b) にとどまらず x の全区間 $(-\infty, \infty)$ に対して超関数 $\tilde{f}(x)$ を定義し得るという意味で好ましい性質をもっている. それゆえ, これを標準母関数とよぶことにしよう.

〔**定義 1**〕 区間 (a,b) で定義された超関数 $f(x)=\text{H.F.}\,F(z)$ に対して

$$\tilde{F}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{j}\int_a^b \frac{f(x)}{x-z}dx = -\frac{1}{j}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}dt \tag{2.7}$$

をその**標準母関数**とよぶ．ただし，$F(z)$ は $z=a, z=b$ で正則，あるいは積分可能とする．また

$$f(x)H(x\,;a,b)\overset{\text{def}}{=}\text{H.F.}\,\tilde{F}(z) \tag{2.8}$$

によって超関数 $f(x)H(x\,;a,b)$ を定義する．

[定理 1]　標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は $z\to\infty$ のとき

$$\tilde{F}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n} \tag{2.9}$$

のように展開される．ただし係数 c_n は

$$c_n=-\frac{1}{j}\int_a^b f(x)x^{n-1}dx \tag{2.10}$$

で与えられる．

（証明）　(2.7) で $(x-z)^{-1}=-z^{-1}(1-x/z)^{-1}$ を z^{-1} のベキ級数に展開して項別に積分すればよい．■

例 1　$f(x)=1$ $(a<x<b)$ の母関数としては $F_1(z)=1(z)$, $F_2(z)=H(z-a)$, $F_3(z)=H(z-a)-H(z-b)$ などが考えられる．実際，$f_1(x)=\text{H.F.}\,F_1(z)=1$, $f_2(x)=\text{H.F.}\,F_2(z)=H(x-a)$, $f_3(x)=\text{H.F.}\,F_3(z)=H(x-a)-H(x-b)$ はどれも $a<x<b$ で $f(x)=1$ に等しいからである．このばあい，標準母関数は

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z)&=\frac{1}{j}\log\frac{z-b}{z-a}=H(z-a)-H(z-b)\\&=\frac{1}{j}\left\{(a-b)\frac{1}{z}+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{1}{z^2}+\cdots\right\}\end{aligned}$$

である．（例 2.1 を見よ．）

注意　標準母関数は流体力学的にはつぎのように解釈される．超関数 $f(x)$ は x 軸上の**渦**（および**わき出し**）の分布である．無限にひろがる静止流体中に渦分布 $f(x)$ を与えたとき生ずる流れの**複素速度**が標準母関数 $\tilde{F}(z)$ である．この流れの場に任意の渦無しの流れ（解析関数 $\varphi(z)$ で表わされる）を重ね合わせても，渦の分布には変化は生じない．すなわち，母関数 $F(z)=\tilde{F}(z)+\varphi(z)$ によって表わされる場はすべて同一の渦分布 $f(x)$ を与えるのである．

(2.9) 式から，$z\to\infty$ のとき $\tilde{F}(z)\sim c_1/z+c_2/z^2+\cdots$ である．これは，有限区間 (a,b) に分布した渦およびわき出しが，無限の遠方では，あたかも原点に強さ $c_1, c_2, \cdots$ の渦（およびわき出し），2 重わき出し，…が存在するように感じられることを表わしている．

渦によって誘導される流れの複素速度という見地に立てば，$(-\infty,\infty)$ で定義された超関数 $f(x)$ に対して標準母関数を考えることは容易である．すなわ

ち，まず区間$(-R, R)$に分布する渦$f(x)$による複素速度を考え，$R\to\infty$での極限をとればよい．もちろん，その極限値が存在するとしての話である．

そこで，ことばを節約するために，つぎのように**超関数の無限主値積分**を定義しておこう．

〔**定義 2**〕 超関数$f(x)$の無限主値積分をつぎの式で定義する．

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{2.11}$$

ふつうの無限積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{2.12}$$

であるから，これが存在するばあいにはもちろん無限主値積分は存在する．しかし，逆は必ずしも成り立たない．

さて，超関数$f(x)=\mathrm{H.F.}\ F(z)$の定積分は

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int_{\mathrm{C}} F(z)dz$$

によって定義されるので，a, bが有限であるかぎり，確定した値をもち，したがって‘主値’などを考える必要はない．超関数の定積分で‘主値’が問題になるのは無限積分のときだけである．そして，(2.11)の右辺の極限は必ずしも存在するとはかぎらないから，超関数の無限主値積分はつねに存在するとはいえないことを注意しておこう．

上に述べたことから，つぎの定義はごく自然であろう．

〔**定義 3**〕 $(-\infty, \infty)$で定義された超関数$f(x)$に対する標準母関数を

$$\tilde{F}(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{j}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx \tag{2.13}$$

で定義する．ただし右辺が存在するものとする．

また，一般に超関数$f(x)$の標準母関数を記号$\mathrm{G.\tilde{F}.}\,f(x)$で表わすことにする．

(2.7)と(2.8)からわかるように，

$$\frac{1}{j}\int_{-R}^{R}\frac{f(x)}{x-z}dx = \mathrm{G.\tilde{F}.}\{f(x)H(x\,;-R, R)\} \tag{2.14}$$

である．この右辺は，有限区間$(-R, R)$で定義された超関数の標準母関数であるから，定理1によって，$z\to\infty$のとき0になる．それゆえ，(2.13)の右辺が存在するばあい，すなわち$\tilde{F}(z)$が定義できるときには，$z\to\infty$で$\tilde{F}(z)$は

多分0になるだろうと想像される．しかし，下の例2で見るように，この予想は必ずしも正しくない．

いずれにしても，$\tilde{F}(z)$ は x 軸を除けば z 平面上いたるところで正則である．したがって，$f(x)=[\tilde{F}_+(x)]_+-[\tilde{F}_-(x)]_-$ は**上超関数**と**下超関数**への分解を与える(定理7.3を見よ)．このように，標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は一般の母関数 $F(z)$ に比べて好ましい性質をもっている．しかし，任意に与えた $F(z)$ に対して $\tilde{F}(z)$ の具体的な関数形を求めることは一般的にそう簡単ではない．下の例は $\tilde{F}(z)$ が比較的容易に見出されるばあいである．読者の演習問題とする．

例 2　$f(x)=1$

$$\tilde{F}(z)=\mathbf{1}(z).$$

例 3　$f(x)=\dfrac{1}{(x-c)^m}$，$\operatorname{Im} c \neq 0$，$(m=1,2,\cdots)$

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{(z-c)^m}\mathbf{1}_{\mp}(z),\ \operatorname{Im} c \gtrless 0.$$

例 4　$f(x)=e^{ikx}$，k=実数

$$\tilde{F}(z)=e^{ikz}\mathbf{1}_{\pm}(z),\ k\gtrless 0.$$

例 5　$f(x)=e^{-\alpha x^2}$，$\operatorname{Re}\alpha\geqq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z)&=i\alpha^{1/2}e^{-\alpha z^2}\int_{\pm i\infty}^{z}e^{\alpha z^2}dz,\ \operatorname{Im} z\gtrless 0\\&=\pm\frac{1}{2}e^{-\alpha z^2}\operatorname{erfc}(\mp i\alpha^{1/2}z),\ \operatorname{Im} z\gtrless 0\\&\sim\frac{i}{2\sqrt{\pi\alpha}}\frac{1}{z}\left\{1+\frac{1}{2\alpha z^2}+\frac{1\cdot 3}{(2\alpha z^2)^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2\alpha z^2)^3}+\cdots\right\},\qquad z\to\infty\end{aligned}$$

ただし，$\operatorname{erfc} z=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^\infty e^{-t^2}dt=1-\operatorname{erf} z.$

$f(x)$ が分数式のばあいには，部分分数に展開して，例3を適用すればよい．上の表現から，$(x-c)^{-m}$ が $\operatorname{Im} c>0$, $\operatorname{Im} c<0$ に応じてそれぞれ下超関数あるいは上超関数であることは明らかであるだろう．

上の例では $f(x)$ はすべて x 軸上で正則であるから，$F(z)=[f(z),0)]$ としてただちに母関数 $F(z)$ が見出される．しかし，標準母関数 $\tilde{F}(z)$ を求めるには，なんらかの工夫なり計算なりが必要である．最後に，$z\to\infty$ での $\tilde{F}(z)$ のふるまいについて注意しよう．例2を除けば，すべて $z\to\pm i\infty$ で $\tilde{F}(z)\to 0$ が成り立つ．しかし，有限区間で定義された超関数については $\tilde{F}(z)$ が z^{-1} のベキ級数のようにふるまうのに対して，いまのばあいはそのようなふるまいは

見られない．例5では一見 z^{-1} についてのベキ級数展開が成り立つように見えるが，実はこれは**漸近展開**であって，ベキ級数展開ではないのである．

§3. 標準母関数をもつ超関数

標準母関数の定義1は明らかに定義3に含まれる．つまり $f(x)=0$ $(x<a, x>b)$ という特別なばあいと考えればよいのである．さて，与えられた超関数 $f(x)$ の標準母関数を求めるには，(2.13) の定積分を計算すればよいわけであるが，一般的にこれはそう簡単ではない．しかし，ばあいによっては，以下に述べる定理を用いることにより，定積分を実行するまでもなくただちに標準母関数を与えることができる．

[定理 2] 超関数が標準母関数をもつならば，それは一義的に定まる．

(証明) 超関数の定積分は超関数自身によって定まり，母関数の選び方にはよらないのであるから，(2.13) で定義される標準母関数が，もし存在すれば，ただ1つにきまることはいうまでもない．∎

まず，ことばを節約するために，つぎのように定義する．

〔**定義 4**〕 $F_+(z)$, $F_-(z)$ はそれぞれ $\mathrm{Im}\, z>0$, $\mathrm{Im}\, z<0$ で正則で，$|x|\to\infty$ のとき有界，$\mathrm{Im}\, z\to\pm\infty$ のとき x に関して一様に $F_\pm(z)\to c_\pm$ (定数) であるような解析関数とする．このとき，超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,[F_+(z), F_-(z)]$ の母関数は“$\pm i\infty$ で $c_\pm$ になる”といい，記号的に $\mathrm{G.F.}\,f(\pm i\infty)=c_\pm$ のように表わす．

[定理 3] 超関数 $f(x)=\mathrm{H.F.}\,F(z)$ の母関数が $\pm i\infty$ で0になるならば，$F(z)$ は標準母関数である．

(証明) 標準母関数の定義は

$$\tilde{F}(z)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{j}\int_{-R}^{R}\frac{f(x)}{x-z}dx \quad (3.1)$$

である．さて

$$\int_{-R}^{R}\frac{f(x)}{x-z}dx=\int_{C}\frac{F(t)}{t-z}dt. \quad (3.2)$$

ただし，積分路Cは2点 $t=\pm R$ を通り，点 $t=z$ を内部に含まない閉曲線である．

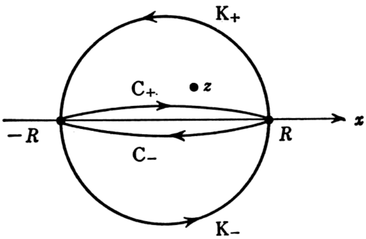


図 2

(図2. 矢印に注意！) いま，線分 $(-R, R)$ を直径とする円Kを考えると，下に示すように

$$\int_K \frac{F(t)}{t-z}dt \to 0, \qquad R\to\infty \tag{3.3}$$

が成り立つ．ところが

$$\int_C + \int_K = \int_{C_+ + K_+} + \int_{C_- + K_-} \tag{3.4}$$

である．いま図2のようにIm $z>0$ のばあいを考えると，

$$\int_{C_+ + K_+} = jF(z), \quad \int_{C_- + K_-} = 0$$

である．これを(3.4)に代入し，さらに(3.2), (3.3)をあわせ考えると，けっきょく

$$\tilde{F}(z) = F(z) \quad (\mathrm{Im}\, z>0)$$

が得られる．Im $z<0$ のばあいについても同様である．

(3.3)を証明するには，Rを十分大きくとって，図3に示すように，積分路の円Kを実数軸から遠く離れた部分 K_1 とそれ以外の部分 K_2 に分解して考えればよい．すなわち，仮定により Im $z\to\pm\infty$ のときxに関して一様に $F_\pm(z)\to 0$ であるから，任意の小さい ε に対して

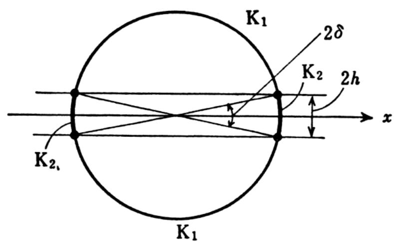


図 3

$$|F(z)|<\varepsilon, \quad |\mathrm{Im}\, z|>h$$

が成り立つようにhを選ぶことができる．また$F(z)$は $|x|\to\infty$ のとき有界であるから，ある有限の定数Aに対して

$$|F(z)|<A, \quad |\mathrm{Im}\, z|<h$$

が成り立つ．そこで $\delta=h/R$ が十分小さくなるようにRを選んで(3.3)の積分の評価を行なえばよいのである．その際，(あらかじめ $R/2>|z|$ のようにRをとっておけば)

$$|t-z| \geqq |t|-|z| > R/2$$

が成り立つことに注意する．詳しくは読者にまかせる．∎

定理3はもうすこし一般化することができる．

[定理 4]　超関数 $f(x)=$H.F. $F(z)$ の母関数が $\pm i\infty$ で定数 $c_\pm$ になるならば，$\tilde{F}(z)=F(z)-(c_+ + c_-)/2$ は$f(x)$の標準母関数である．

（証明） 明らかに $\tilde{F}(z)$ は $F(z)$ と同等である．いま

$$F_1(z) = F(z) - c_+\mathbf{1}_+(z) + c_-\mathbf{1}_-(z) \tag{3.5}$$

を考えると，仮定された $F(z)$ の性質から，$f_1(x)=\text{H.F.}\ F_1(z)$ は $\pm i\infty$ で 0 になることがわかる．したがって，定理 3 により，$F_1(z)$ は標準母関数である．ところが，(3.5) の右辺はつぎのように変形できる．

$$\begin{aligned}F_1(z) &= F(z) - c_+\left\{\mathbf{1}(z)+\frac{1}{2}\right\} + c_-\left\{\mathbf{1}(z)-\frac{1}{2}\right\}\\ &= F(z) - \frac{(c_+ + c_-)}{2} - (c_+ - c_-)\mathbf{1}(z)\\ &= \tilde{F}(z) - (c_+ - c_-)\mathbf{1}(z).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \tilde{F}(z) = F_1(z) + (c_+ - c_-)\mathbf{1}(z). \tag{3.6}$$

$\mathbf{1}(z)$ が 1 の標準母関数であることを想い起こすと，けっきょく $\tilde{F}(z)$ は 2 つの標準母関数の和として表わされることになり，$\tilde{F}(z)$ 自身標準母関数であることがわかる．▮

例 6 つぎの結果を確かめよ．

$$\text{G.}\tilde{\text{F}}.\ 1 = \mathbf{1}(z), \tag{3.7}$$

$$\text{G.}\tilde{\text{F}}.\ \sin kx = \frac{1}{2i}\{e^{ikz}\mathbf{1}_+(z) - e^{-ikz}\mathbf{1}_-(z)\},\quad k>0 \tag{3.8}$$

$$\text{G.}\tilde{\text{F}}.\ |x|^{1/2} = \frac{i}{2}\{(-z)^{1/2} - z^{1/2}\}. \tag{3.9}$$

(3.7) は定理 4，(3.8) は定理 3 によって確かめられる．(3.9) を導くには，定義 3 によって無限主値積分を計算すればよい．

§4. 周期超関数

これからいよいよ周期超関数の議論をはじめる．周期超関数の定義としては，周期関数の定義をそのまま使えばよい．

〔**定義 5**〕 超関数 $f(x)$ が，ある実数 l に対して

$$f(x+l) = f(x) \tag{4.1}$$

の関係を満足するとき，$f(x)$ は**周期** l の**周期超関数**であるという．

[定理 5] 超関数 $f(x)$ が周期 l の周期超関数であるための必要十分条件は，周期 l の標準母関数 $\tilde{F}(z)$ をもつことである．

（証明） 十分条件の方は明らかである．すなわち，一般に母関数 $F(z)$ を周期 l の周期関数とすれば

$$F(z+l)=F(z) \tag{4.2}$$

が成り立つ．この両辺の H.F. をとれば (4.1) が得られるからである．

必要条件の証明はちょっとめんどうである．簡単のために，$f(x)$ は $x=0$ で正則であると仮定しよう．($x=0$ で $f(x)$ が正則でなくても，もし $x=x_0$ で正則であるとすれば，$f_1(x)\equiv f(x+x_0)$ について考えればよい．すなわち，$f(x)$ の正則点が 1 つでもあれば以下の議論が成り立つ．) 証明の方針は，$f(x)$ の標準母関数を具体的に周期関数を使って構成することである．

$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義されているから，もちろん $0<x<l$ で定義されている．また，仮定により，$x=0,l$ で $f(x)$ は正則である．したがって，定義 1 により，区間 $(0,l)$ で定義された超関数 $f(x)$ の標準母関数 $F_0(z)$ を

$$F_0(z)=\frac{1}{j}\int_0^l \frac{f(x)}{x-z}dx \tag{4.3}$$

として与えることができる．そして，(2.8) により

$$\text{H.F. } F_0(z)=f(x)H(x;0,l)\equiv f_0(x) \tag{4.4}$$

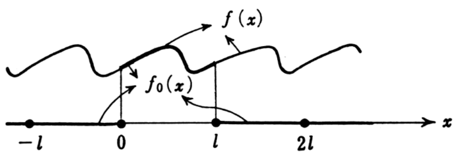


図 4

である．超関数 $f_0(x)$ は区間 $(0,l)$ だけではなく $(-\infty,\infty)$ 全体で定義されていることに注意しよう．(図 4 で太線で描かれているのが $f(x)H(x;0,l)$ である.) いま，n を任意の整数とすると，(4.4) から

$$\begin{aligned}\text{H.F. } F_0(z+nl)&=f(x+nl)H(x+nl;0,l)\\&=f(x)H(x;-nl,-nl+l)\end{aligned} \tag{4.5}$$

が得られる．ただし，$f(x+nl)=f(x)$ (周期性) と，一般的に成り立つ関係

$$H(x+c;a,b)=H(x;a-c,b-c) \tag{4.6}$$

とを使った．さて，定義 3 によって $f(x)$ の標準母関数を求めよう．$R=Nl$ (N は正の整数) とおき，(2.13) の右辺の (極限をとる前の) 積分区間 $(-R,R)$ を $2N-1$ 個の区間

$$(-Nl,-Nl+l),\ (-Nl+l,-Nl+2l),\cdots,\ (Nl-l,Nl)$$

に分けると，(2.13) は

$$\tilde{F}(z)=\lim_{N\to\infty}F_N(z), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}F_N(z)&=\frac{1}{j}\int_{-Nl}^{Nl}\frac{f(x)}{x-z}dx\\&=\text{G.F.}\left\{\sum_{n=-N}^{N-1}f(x)H(x;nl,nl+l)\right\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

のように書き表わされる．この式は，(4.5) を考慮すれば

$$F_N(z)=\sum_{n=-N}^{N-1}F_0(z-nl) \tag{4.9}$$

となる．これはまた

$$F_N(z)=F_0(z)+F_0(z+Nl)+\sum_{n=1}^{N-1}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\} \tag{4.10}$$

のように表わすこともできる．ここで $N\to\infty$ の極限を考えると，右辺はたしかに収束する．なぜならば，定理1により

$$F_0(z)=\frac{c_1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{4.11}$$

であるから，$n\to\infty$ に対して

$$F_0(z+nl)+F_0(z-nl)=\frac{2c_1z}{z^2-n^2l^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

したがって，(4.10) の右辺の級数は $\sum 1/n^2$ と同じように収束するからである．$F_0(z+Nl)\to 0$ $(N\to\infty)$ に注意すれば，(4.7), (4.10) はけっきょく

$$\tilde{F}(z)=F_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\} \tag{4.12}$$

となる．すなわち，周期超関数 $f(x)$ に対する標準母関数 $\tilde{F}(z)$ が得られた．残る問題は $\tilde{F}(z)$ が周期関数であることを示すだけである．

さて，(4.7) によれば

$$\tilde{F}(z-l)=\lim_{N\to\infty}F_N(z-l)$$

である．ところが，(4.9) によって

$$\begin{aligned}F_N(z-l)&=\sum_{n=-N}^{N-1}F_0(z-l-nl)\\&=\sum_{n=-N+1}^{N}F_0(z-nl)\\&=F_0(z)+F_0(z-Nl)+\sum_{n=1}^{N-1}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\}\\&\to F_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\}\qquad(N\to\infty)\\&=\tilde{F}(z).\end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{F}(z-l) = \tilde{F}(z). \tag{4.13}$$

これは $\tilde{F}(z)$ が周期 l の周期関数であることを示すものである. ∎

応用上の便宜を考えて, 上の証明の中で得られた結果を定理として述べておこう.

[定理 6] 周期 l の周期超関数 $f(x)$ の標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は

$$\tilde{F}(z) = F_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\{F_0(z+nl)+F_0(z-nl)\}, \tag{4.14}$$

$$F_0(z) = \frac{1}{j}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{f(x)}{x-z}dx = \mathrm{G.\tilde{F}.}f_0(x), \tag{4.15}$$

$$f_0(x) = f(x)H(x;\, x_0, x_0+l) \tag{4.16}$$

で与えられる. ただし $f_0(x)$ は $f(x)$ を 1 周期だけ考えた超関数で, $F_0(z)$ はその標準母関数である. また $x=x_0$ は $f(x)$ の任意の正則点とする.

[定理 7] 周期 l の周期超関数 $f(x)$ の標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は, $z\to\pm i\infty$ のとき

$$\tilde{F}(z) = \pm\frac{1}{2l}\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)dx + O(e^{\pm jz/l}) \tag{4.17}$$

のようにふるまう.

(証明) (4.15) の $F_0(z)$ は, 定理 1 により

$$F_0(z) = \frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots,\quad z\to\infty$$

$$c_m = -\frac{1}{j}\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)x^{m-1}dx \tag{4.18}$$

のように展開される. この第 1 項だけをとって (4.14) に代入すると, よく知られた公式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+nl}+\frac{1}{z-nl}\right\}\\ &= \frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2l^2} = \frac{\pi}{l}\cot\frac{\pi z}{l}\\ &= -\frac{i\pi}{l}\,\frac{1+e^{jz/l}}{1-e^{jz/l}} = \frac{i\pi}{l}\,\frac{1+e^{-jz/l}}{1-e^{-jz/l}}\end{aligned} \tag{4.19}$$

によって,

$$\tilde{F}(z) = \mp\frac{i\pi c_1}{l}+O(e^{\pm jz/l}),\quad z\to\pm i\infty$$

が得られる. $F_0(z)$ の第 2 項以下を考慮すると, $z^{-2}, z^{-3}, \cdots$ の項を考慮するこ

となるが，それらの寄与は (4.19) を z につき逐次微分したものに相当し，すべて $O(e^{\pm jz/l})$ の程度である．したがって，$\tilde{F}(z)$ に関する上の評価には変りはない．c_1 として (4.18) の表現を使うと (4.17) が得られる．∎

周期超関数の母関数は一般に $F(z)=\tilde{F}(z)+\varphi(z)$ の形に表わされる．ただし，$\tilde{F}(z)$ は標準母関数，$\varphi(z)$ は x 軸上で正則な解析関数である．$\tilde{F}(z)$ は周期関数であるが，$\varphi(z)$ は必ずしもそうとはかぎらない．しかし，実際上のとり扱いでは，まず $F(z)$ としてなにかある周期関数をとり，その上で $f(x)=$ H.F. $F(z)$ を考えることが多いので，今後周期超関数の母関数としてはつねに周期関数をとることにする．そうすれば $\varphi(z)$ は周期関数になる．しかし，このことは本質的になんらの制限をも意味しないのである．

例 7 $F(z)=\operatorname{cosec}(z-ai)1_{+}(z)$, $a>0$

このばあい $z=ai+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ は $F(z)$ の特異点である．したがって，$F(z)$ は標準母関数ではない．しかし

$$\tilde{F}(z)=\operatorname{cosec}(z-ai)1_{-}(z), \quad \varphi(z)=\operatorname{cosec}(z-ai)$$

ととれば，$F(z)=\tilde{F}(z)+\varphi(z)$ となり，$\tilde{F}(z)$ は標準母関数である．$\tilde{F}(z)$ の上成分は 0 であるから，$f(x)=$ H.F. $F(z)=\operatorname{cosec}(x-ai)$ は**下超関数**である．

§5. 超関数の Fourier 級数

周期 l の 周期超関数 $f(x)$ を考え，その標準母関数を $\tilde{F}(z)=[\tilde{F}_{+}(z), \tilde{F}_{-}(z)]$ とすると，$\tilde{F}_{+}(z)$, $\tilde{F}_{-}(z)$ はそれぞれ z 平面の上半平面および下半平面で正則で，かつともに周期 l の周期関数である．いま

$$Z=e^{jz/l}, \quad z=\frac{l}{j}\log Z \tag{5.1}$$

によって新しい変数 Z を導入すると，z 平面の上半平面 D_{+} は Z 平面の単位円：$|Z|=1$ の内部に，下半平面 D_{-} は単位円の外部に写像される (図 5-a, b)．z 平面と Z 平面の対応は 1 対 1 ではないけれども，周期性によって，$\tilde{F}(z)$ は Z の 1 価関数になる．さて，$\tilde{F}_{+}(z)$ は $|Z|<1$ で正則であるから，つぎのように Z のベキ級数に展開される：

$$\tilde{F}_{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n, \quad |Z|<1. \tag{5.2}$$

この ベキ級数の収束半径は $1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}$ である (Cauchy-Hadamard の定理)．したがって (5.2) の展開が成り立つためには，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}\leqq 1$ でなければならない．また，$\tilde{F}_{-}(z)$ は $|Z|>1$ で正則であるから，Z^{-1} のベキ級数 (Laurent 級数)

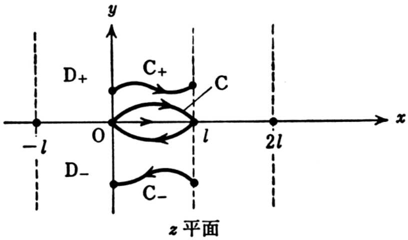


図 5-a

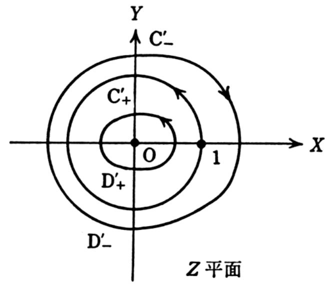


図 5-b

に展開される：

$$\tilde{F}_-(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-c_{-n})Z^{-n},\quad |Z|>1. \tag{5.3}$$

ただし，$\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_{-n}|^{1/n}\leqq 1$ である．($\tilde{F}_-(z)$ の展開係数は $\tilde{F}_+(z)$ の展開係数とは無関係であるから，たとえば c_n' とでもすればよいが，あとで形を整えるために，$-c_{-n}$ とおいてある．なお，この節の最後の注意を見よ．）展開係数 c_n, $-c_{-n}$ を求めるには，(5.2), (5.3) にそれぞれ Z^{-n-1}, Z^{n-1} を掛けて原点 $Z=0$ のまわりの 1 周積分を行なえばよい．すなわち

$$c_n=\frac{1}{j}\int_{C_+'}\tilde{F}_+(z)Z^{-n-1}dZ,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{j}\int_{C_-'}\tilde{F}_-(z)Z^{n-1}dZ.$$

ただし，C_+', C_-' は図 5-b に示す積分路である．z 平面にもどると，(5.1) により $dZ=(j/l)e^{jz/l}dz$ であるから，

$$c_n=\frac{1}{l}\int_{C_+}\tilde{F}_+(z)e^{-njz/l}dz,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{l}\int_{C_-}\tilde{F}_-(z)e^{njz/l}dz$$

となる．ただし，積分路 C_+, C_- は図 5-a に示すとおりである．上の 2 式は 1 つにまとめて

$$c_n=\frac{1}{l}\int_{C}\tilde{F}(z)e^{-njz/l}dz,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{5.4}$$

と書きかえることができる．ここで C は図 5-a に示すような，$z=0$, $z=l$ を通る閉曲線である．($n\geqq 0$ に対しては $\int_{C_-}\tilde{F}_-(z)e^{-njz/l}dz=0$, $n<0$ に対しては

$\int_{C_+}\tilde{F}_+(z)e^{-n\jmath z/l}dz=0$ であることに注意！）　さらに，母関数 $\tilde{F}(z)$ に関する1周積分が超関数 $f(x)$ に関する定積分を意味することを想い起こすと，(5.4) は

$$c_n=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)e^{-n\jmath x/l}dx, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{5.5}$$

となる．以上の結果はつぎの定理にまとめられる．

[定理 8]　周期 l の周期超関数 $f(x)$ の標準母関数 $\tilde{F}(z)$ は

$$\tilde{F}(z)=c_0\mathbf{1}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{n\jmath z/l}\mathbf{1}_+(z)+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-n\jmath z/l}\mathbf{1}_-(z), \tag{5.6}$$

$$c_n=\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)e^{-n\jmath x/l}dx \tag{5.7}$$

で与えられる．ただし $x=x_0$ は $f(x)$ の任意の正則点とする．

上の定理の (5.6) 式は (5.2), (5.3) をまとめたものである．また，(5.7) 式が (5.5) と実質的に同じものであることは明らかであろう．

$\tilde{F}_+(x)$, $\tilde{F}_-(x)$ が存在するばあいには，(5.6) から

$$f(x)=\text{H.F.}\,\tilde{F}(z)=\tilde{F}_+(x)-\tilde{F}_-(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{n\jmath x/l}$$

が得られる．すなわち，これは $f(x)$ がふつうの関数のばあいの **Fourier 展開式**に相当する．それゆえ，超関数についても **Fourier 級数**をつぎのように定義するのが合理的であろう．

〔定義 6〕

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{n\jmath x/l}\overset{\text{def}}{=}c_0+\left[\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{n\jmath x/l}\right]_+ +\left[\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-n\jmath x/l}\right]_- \tag{5.8}$$

によって定義される超関数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{n\jmath x/l}$ を **Fourier 級数**という．また c_n を **Fourier 係数**とよぶ．ただし，$\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}\leqq 1$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_{-n}|^{1/n}\leqq 1$ とする．（これらは，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{n\jmath z/l}$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-n\jmath z/l}$ がそれぞれ $\text{Im}\,z>0$, $\text{Im}\,z<0$ で収束するための必要十分条件である.）

[定理 9]　Fourier 級数は何回でも項別微分が可能である．

（証明）　(5.8) を x について微分することは，右辺では (5.6) を z について微分して H.F. をとることである．z に関する無限級数は一様収束だから項別微分ができる．これは左辺を x について項別微分したものと一致する．すなわち，Fourier 級数は項別微分が可能である．この操作は何回でもできる．▮

[定理 10]　Fourier 級数は周期超関数である．逆に，任意の周期超関数 $f(x)$

は Fourier 級数として表わすことができる．すなわち，周期を l とすれば

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{njx/l}, \tag{5.9}$$

$$c_n = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l} f(x)e^{-njx/l}dx \tag{5.10}$$

である．ただし，$x=x_0$ は $f(x)$ の任意の正則点とする．

（証明）　定義式 (5.8) から明らかなように，Fourier 級数は周期関数を母関数とする超関数である．したがって，定理 5 により周期超関数である．

つぎに，$f(x)$ は周期超関数であるから，定理 5 により標準母関数をもつ．これを $\tilde{F}(z)$ とすると，$f(x)=\text{H.F.}\,\tilde{F}(z)$ である．そこで定理 8 により $\tilde{F}(z)$ として (5.6) の表現を使い，定義 6 の (5.8) 式を使うと，ただちに (5.9) が得られる．▮

例 8　つぎの関係が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{njx/l} = l\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl). \tag{5.11}$$

左辺は，すべての c_n が 1 であるような Fourier 級数である．その標準母関数を $\tilde{F}(z)=[\tilde{F}_+(z),\tilde{F}_-(z)]$ とすると，定義 6 と (5.6) により

$$\tilde{F}_+(z) = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{njz/l} = \frac{1}{2}+\frac{e^{jz/l}}{1-e^{jz/l}} \qquad \because\ \operatorname{Im} z>0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+e^{jz/l}}{1-e^{jz/l}} = \frac{i}{2}\cot\frac{\pi z}{l},$$

$$\tilde{F}_-(z) = -\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-njz/l} = -\frac{1}{2}-\frac{e^{-jz/l}}{1-e^{-jz/l}} \qquad \because\ \operatorname{Im} z<0$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1+e^{-jz/l}}{1-e^{-jz/l}} = \frac{i}{2}\cot\frac{\pi z}{l}.$$

すなわち，$\tilde{F}_+(z),\tilde{F}_-(z)$ は同一の関数で表わされる．したがって

$$\tilde{F}(z) = \frac{i}{2}\cot\frac{\pi z}{l}. \tag{5.12}$$

$\tilde{F}(z)$ は $z=nl$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ に 1 位の極をもち，その近くでは

$$\tilde{F}(z) \sim -\frac{l}{j}\frac{1}{z-nl}, \qquad z\to nl$$

$$= l\delta(z-nl)$$

のようにふるまう．ただし $\delta(z)=-(jz)^{-1}$ は $\delta(x)$ の母関数である．それゆえ

$$\tilde{F}(z) \cong l\delta(z-nl), \qquad z\to nl. \tag{5.13}$$

$$\therefore\ f(x) = \text{H.F.}\,\tilde{F}(z) = l\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl).$$

これは (5.11) の関係である．つまり，(5.11) の Fourier 級数は等間隔に並んだ δ 関数の無限個の列を表わす．流体力学的にいえば，$\tilde{F}(z)$ は **渦列** による複素速度である．

§6. 周期超関数の Fourier 変換

定理6と定理8によれば，周期超関数$f(x)$の標準母関数$\tilde{F}(z)$は2通りの形，すなわち(4.14)，(5.6)のように表わすことができる．これに対応して，$f(x)$自身は

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x)H(x;x_0+nl,x_0+nl+l), \tag{6.1}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{nJx/l} \tag{6.2}$$

のように表わされる．§4.2で述べたように，無限級数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}$は本質的には母関数についてとられるものであり，かつ母関数については(4.14)，(5.6)の右辺の無限級数は一様収束性が保証されているから，(6.1)，(6.2)を項別に微分したり，Fourier 変換したりすることができるのである．

さて，(6.1)の表現は，$f(x)$を1周期ずつに分割してそれを加え合わせることを意味し，$f(x)$の周期性を端的に示すものである．これに対して(6.2)の表現は，'正弦波' $e^{nJx/l}$（その波長はl/n）の重ね合せとして$f(x)$が表わされることを示している．

まず，(6.1)の表現から出発して$f(x)$の Fourier 変換$g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$を求めよう．（本質的な制限ではないから，以下の議論では，$f(x)$は$x=0$で正則であると仮定する．すなわち$x_0=0$ととる．必要があれば，いつでもx_0を復活することができる．）

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \mathcal{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x)H(x;nl,nl+l) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f(x)H(x-nl;0,l)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f(x-nl)H(x-nl;0,l)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-Jnl\xi}\mathcal{F}\{f(x)H(x;0,l)\}. \end{aligned}$$

ただし，2行目を得るには(4.6)を，3行目を得るには$f(x)$の周期性を，4行目を得るには(5.3.15)の関係式をそれぞれ使う．いま

$$g_0(\xi)=\mathcal{F}\{f(x)H(x;0,l)\} \tag{6.3}$$

$$=\int_0^l f(x)e^{-J\xi x}dx \tag{6.4}$$

とおくと，$g_0(\xi)$は中央超関数の Fourier 変換であるから整関数である．そし

て，上の $g(\xi)$ はつぎのように書きかえられる．

$$g(\xi)=g_0(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnl\xi}=g_0(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnl\xi}$$

$$=g_0(\xi)\cdot\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-n/l)=\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_0(n/l)\delta(\xi-n/l). \tag{6.5}$$

ただし，例 8 の関係式と，δ 関数の性質：

$$\varphi(x)\delta(x-a)=\varphi(a)\delta(x-a) \tag{6.6}$$

（$\varphi(x)$ は $x=a$ で正則な解析関数）が使ってある．

つぎに，$f(x)$ に対する (6.2) の表現に基づいて $g(\xi)$ を求めよう．

$$g(\xi)=\mathfrak{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{njx/l}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathfrak{F}\{e^{njx/l}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\xi-n/l). \tag{6.7}$$

ただし，公式 $\mathfrak{F}e^{jkx}=\delta(\xi-k)$ を使う．

(6.5), (6.7) を比較すれば

$$c_n=\frac{1}{l}g_0(n/l) \tag{6.8}$$

の関係が成り立つことがわかる．実は，(6.8) の関係は c_n の定義式 (5.10) と (6.4) とを比較することによって直接得ることもできるのである．以上を定理の形にまとめておこう．

[定理 11]　周期 l の周期超関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $g(\xi)$ は

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{njx/l}, \tag{6.9}$$

$$g(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\xi-n/l) \tag{6.10}$$

のように表わされる．ただし

$$c_n=\frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right)=\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)e^{-njx/l}dx, \tag{6.11}$$

$$g_0(\xi)=\mathfrak{F}\{f(x)H(x;\,x_0,x_0+l)\}=\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)e^{-j\xi x}dx \tag{6.12}$$

であって，$x=x_0$ は $f(x)$ の任意の正則点である．

以上の議論から明らかなように，周期超関数 $f(x)$ を **Fourier 展開する**ということは，実は $f(x)$ の**標準母関数**を求めることにほかならない．そして **Fourier 係数** c_n を求めるには，$f(x)$ を 1 周期だけ考えた超関数 $f_0(x)=f(x)H(x;\,x_0,x_0+l)$ の **Fourier 変換** $g_0(\xi)=\mathfrak{F}f_0(x)$ を求めればよいのである．このことは，c_n の $n\to\infty$ に対するふるまいを調べるときに大いに役立つであろう．

$f(x)$ がふつうの関数のばあいには，(6.11) を使ってふつうどおり定積分

の計算を行なえばよい．しかし，一般の超関数のばあいには，この定積分が $-\int_{C_0}F(z)e^{-jnz/l}dz$ の意味であることを忘れてはならない．ここで $F(z)$ は母関数，また C_0 は x 軸から1周期の区間 (x_0, x_0+l) を切りとる閉曲線である．

上の定理11では超関数 $f(x)$, $g(\xi)$ だけが表面に現われている．それらの母関数 $F(z)$, $G(\zeta)$ のあいだにはどのような関係があるのだろうか？　これを知っておくことも無益ではないと思われるので，これまでに得られた結果を母関数の立場でまとめておく．

[定理 12]　周期 l の周期超関数を $f(x)$，これを1周期だけ考えて得られる超関数を $f_0(x)=f(x)H(x;x_0,x_0+l)$ とし，それらの母関数を $F(z)$, $F_0(z)$，標準母関数を $\tilde{F}(z)$, $\tilde{F}_0(z)$ とする．このとき，つぎの関係が成り立つ．

$$f(x) = \text{H.F. } F(z) = \text{H.F. } \tilde{F}(z), \tag{6.13}$$

$$f_0(x) = \text{H.F. } F_0(z) = \text{H.F. } \tilde{F}_0(z), \tag{6.14}$$

$$G_0(\zeta) = \mathfrak{F}F_0(z) = g_0(\zeta)\mathbf{1}(\zeta), \tag{6.15}$$

$$G(\zeta) = \mathfrak{F}F(z) = \frac{g_0(\zeta)}{1-e^{jl\zeta}} \cong \frac{i}{2}g_0(\zeta)\cot\pi l\zeta, \tag{6.16}$$

$$g_0(\zeta) = \int_{x_0}^{x_0+l} f(x)e^{-j\zeta x}dx = -\int_{C_0}F(z)e^{-j\zeta z}dz, \tag{6.17}$$

$$\tilde{F}_0(z) = \frac{1}{j}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{f(x)}{x-z}dx = -\frac{1}{j}\int_{C_\varepsilon}\frac{F(t)}{t-z}dt, \tag{6.18}$$

$$\tilde{F}(z) = \tilde{F}_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\tilde{F}_0(z+nl)+\tilde{F}_0(z-nl)\}, \tag{6.19}$$

$$= c_0\mathbf{1}(z) + \sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{njz/l}\mathbf{1}_+(z) + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-njz/l}\mathbf{1}_-(z), \tag{6.20}$$

$$c_n = \frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right). \tag{6.21}$$

（証明）　これまでに得られた結果を整理してならべただけである．読者諸氏の検討をおすすめする．∎

§7.　δ関数列と階段関数

読者諸氏もよくご承知のように，超関数としてもっとも基本的なものは **Dirac の δ 関数**である．そして，この δ 関数はふつうの関数（を見直した超関数）**Heaviside 関数** $H(x)$ の微分として表わされるのである．つぎに，周期超関数でこれらに対応するものを考えてみよう．

〔**定義 7**〕　周期 l の**階段関数** $H(x,l)$ と **δ 関数列** $\delta(x,l)$ を

$$H(x,l) \overset{\text{def}}{=} H(x)+H_+(x,l)+H_-(x,l), \tag{7.1}$$

$$\delta(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl) = \delta(x)+\delta_+(x,l)+\delta_-(x,l) \tag{7.2}$$

で定義する．ただし，$H_+(x,l)$, $H_-(x,l)$ はそれぞれ**右階段関数**，**左階段関数**，また $\delta_+(x,l)$, $\delta_-(x,l)$ は**右 δ 関数列**，**左 δ 関数列**であって

$$H_+(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}H(x-nl), \tag{7.3}$$

$$H_-(x,l) \overset{\text{def}}{=} -H_+(-x,l), \tag{7.4}$$

$$\delta_+(x,l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-nl), \tag{7.5}$$

$$\delta_-(x,l) \overset{\text{def}}{=} \delta_+(-x,l) \tag{7.6}$$

で定義される．

（**合理性**）　まず，右辺の無限級数がたしかに存在することを証明しなければならない．それには，定義 4.1 により，$\sum H(x-nl)=\text{H.F.}\sum H(z-nl)$ などであることに注意する．ここで $H(z)=-j^{-1}\operatorname{Log}(-z)$ は Heaviside 関数 $H(x)$ の母関数である．さて

$$\begin{aligned} H(z-nl) &= -\frac{1}{j}\operatorname{Log}(-z+nl) \\ &= -\frac{1}{j}\operatorname{Log}\left\{nl\left(1-\frac{z}{nl}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{j}\left\{\log nl-\frac{z}{nl}+O\left(\frac{z^2}{n^2l^2}\right)\right\}, \quad n\to\infty \end{aligned}$$

であるから，

$$H(z-nl)+\frac{1}{j}\left(\log nl-\frac{z}{nl}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n\to\infty$$

である．この等式の左辺は明らかに $H(z-nl)$ と同等である．したがって，

$$\begin{aligned} H_+(x,l) &= \sum_{n=1}^{\infty}H(x-nl) \\ &= \text{H.F.}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{H(z-nl)+\frac{1}{j}\left(\log nl-\frac{z}{nl}\right)\right\} \end{aligned}$$

であって，この式の右辺の無限級数は $\sum n^{-2}$ と同様に収束する．それゆえ，(7.3) によって定義される超関数 $H_+(x,l)$ はたしかに存在するのである．

$H_+(x,l)$ は，Heaviside 関数 $H(x)$ を $x=l$ からはじめて x 軸方向に l ずつ

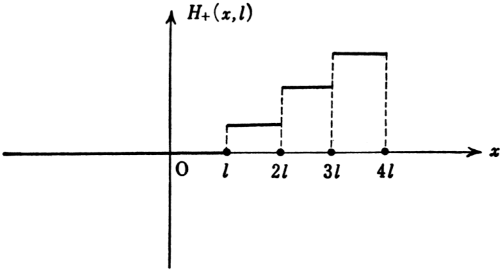


図 6

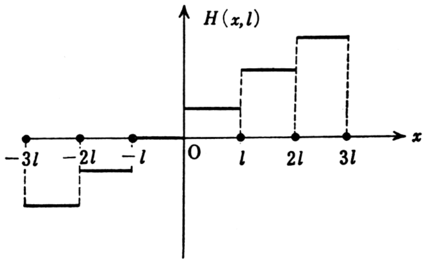


図 7

右にずらせて重ね合わせたものであって，図6のように表わされることは容易に確かめられるであろう．また，$H(x,l)$ は $H_+(x,l)$, $H_-(x,l)$, $H(x)$ を重ね合わせたものであって，図7に示されるように，階段関数とよぶのにふさわしいものである．

つぎに，定理4.3により $\sum_n$ と d/dx は交換可能であるから，

$$\frac{d}{dx}H_+(x,l) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} H(x-nl) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}H(x-nl)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-nl) = \delta_+(x,l)$$

のように，$\delta_+(x,l)$ は超関数 $H_+(x,l)$ の微分としてたしかに超関数である．この $\delta_+(x,l)$ が $x=l$ からはじまり右の方に等間隔 l でならんだ δ 関数の列を表わすことはいうまでもなかろう．また，$\delta(x,l)$ は左右に無限にならんだ δ 関数の列である．▮

[定理 13]　$H(x,l)$, $\delta(x,l)$ の母関数はつぎのように与えられる．

$$H(x,l) = \text{H.F.}\, H(z,l), \tag{7.7}$$

$$\delta(x,l) = \text{H.F.}\, \delta(z,l). \tag{7.8}$$

ただし

$$H(z,l) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{j}\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\} \tag{7.9}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{z}{l}\right)\mathbf{1}(z) - \frac{1}{j}\operatorname{Log}(1-e^{jz/l})\mathbf{1}_+(z)$$

$$+\frac{1}{j}\operatorname{Log}(1-e^{-jz/l})\mathbf{1}_-(z), \tag{7.10}$$

$$\delta(z,l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{2l}\cot\frac{\pi z}{l} = \frac{1}{l}\frac{1}{1-e^{jz/l}} - \frac{1}{2l}. \tag{7.11}$$

（証明）　まず (7.8) を証明する．(7.11) の定義式により，$\delta(z,l)$ は $z=nl$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ に 1 位の極をもつ 1 価解析関数である．例 8 ですでに述べたように，$z=nl$ の近くでは

$$\delta(z,l) \sim -\frac{1}{j}\frac{1}{z-nl}, \quad z\to nl$$

$$= \delta(z-nl)$$

である．ただし，$\delta(z)=-(jz)^{-1}$ は $\delta(x)$ の母関数である．したがって

$$\text{H.F.}\,\delta(z,l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nl)$$

が成り立つ．すなわち (7.8) が証明された．

(7.7) を証明するには，まず

$$\delta_\pm(x,l) = \frac{d}{dx}H_\pm(x,l), \tag{7.12}$$

$$\delta(x,l) = \frac{d}{dx}H(x,l) \tag{7.13}$$

の関係に注意する．(7.12) の $+$ のばあいはすでに定義 7 の合理性を説明するときに得られたものである．$-$ のばあいは (7.4)，(7.6) を考慮すれば ただちに得られる．そして，$\delta(x)=H'(x)$ と (7.12) を使えば (7.13) が得られるのである．さて，(7.13) の関係を母関数について言い表わすと

$$\delta(z,l) = \frac{d}{dz}H(z,l)$$

である．これを z について積分すると

$$H(z,l) = \int\delta(z,l)dz = \frac{i}{2l}\int\cot\frac{\pi z}{l}dz$$

$$= -\frac{1}{j}\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\} + c\mathbf{1}(z) + c'. \tag{7.14}$$

ただし，c, c' は任意の定数（積分定数）である．（ここで，右辺の $\{\cdots\}$ を $\sin \pi z/l$

としてもよいが，c, c' の決定がすこしめんどうになる．積分定数が c, c' のように2個あるのは，積分の際に母関数の上下両成分に対して1つずつ積分定数が考えられるからである．H.F. $c'=0$ であるから，実は c' は最初からとり除いておいてもよい．)

さて，c は H.F. $H(z,l)=H(x,l)$ になるように決めなければならない．$z=0$ の近くでは

$$2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\sim\frac{2\pi}{l}(-z),\quad z\to 0$$

である．(7.14) の右辺の log の項は多価関数であるが，$z\to 0$ のとき

$$\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\}\sim\log\frac{2\pi}{l}+\mathrm{Log}(-z)$$

となるような分枝をとることに決めておくと，

$$\begin{aligned}H(z,l)&\sim-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(-z)-\frac{1}{j}\log\frac{2\pi}{l}+c\mathbf{1}(z)+c'\\&\cong H(z)+c\mathbf{1}(z),\quad z\to 0\end{aligned}$$

となる．ところが，図7からも明らかなように，$x\to 0$ のとき $H(x,l)=H(x)$ である．したがって，$c=0$ でなければならない．すなわち，(7.14) は (7.9) となる．これで (7.9) が証明された．

(7.10) は (7.9) を変形することによって得られる．すなわち

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi(-z)}{l}&=\frac{1}{i}(e^{-\pi iz/l}-e^{\pi iz/l})\\&=e^{\mp\pi i/2}e^{\mp\pi iz/l}(1-e^{\pm jz/l})\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}-\frac{1}{j}\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\}&=-\frac{1}{j}\left\{\mp\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{l}\right)+\mathrm{Log}(1-e^{\pm jz/l})\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{l}\right)\mathbf{1}(z)-\frac{1}{j}\mathrm{Log}(1-e^{\pm jz/l})\end{aligned}$$

と書ける．ところが，$\mathrm{Im}\,z\gtrless 0$ に応じて $|e^{\pm jz/l}|<1$ であるから，上式の右辺は上半平面および下半平面で正則である．(7.10) は上式を $\mathbf{1}_+(z)$, $\mathbf{1}_-(z)$ を使って表わしたものである．∎

注意　(7.10) の右辺で $(z/l)\mathbf{1}(z)$ の項は周期関数ではない．この項は $H(x,l)=$ H.F. $H(z,l)$ に対して x/l を寄与するから，階段関数は周期関数ではない．これは図7から明らかであろう．しかし $\dfrac{d}{dx}H(x,l)=\delta(x,l)$ はもちろん周期超関数である．

[定理 14] 階段関数 $H(x,l)$ と δ 関数列 $\delta(x,l)$ についてつぎの関係式が成り立つ.

$$H(x,l)=\frac{x}{l}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi nx}{l}, \tag{7.15}$$

$$\delta(x,l)=\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{nJx/l} \tag{7.16}$$

$$=\frac{1}{l}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi nx}{l}\right\}, \tag{7.17}$$

$$\delta(x,l)=\frac{d}{dx}H(x,l), \tag{7.18}$$

$$\mathcal{F}\,\delta(x,l)=\frac{1}{l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right). \tag{7.19}$$

(証明) (7.15) を導くには (7.10) の H.F. をとればよい. その際, $\operatorname{Im} z\gtrless 0$ に応じて $|e^{\pm Jz/l}|<1$ であるから

$$\operatorname{Log}(1-e^{\pm Jz/l})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\pm nJz/l},\quad \operatorname{Im} z\gtrless 0$$

のような展開式が成り立ち,

$$\text{H.F. }\operatorname{Log}(1-e^{\pm Jz/l})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{nJx/l}-e^{-nJx/l})$$

$$=-2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi nx}{l}$$

が得られるのである. (次節の (8.6) の表現を使う!)

(7.16) はすでに例 8 で導いた結果である. これはもちろん (7.11) の H.F. をとれば得られる. (7.17) は (7.16) を三角関数を使って表わしたものである.

(7.18) はすでに (7.13) として得られた関係である. この関係はまた, (7.15) を x について微分して (7.17) と比較することによっても確かめられる.

(7.19) は "δ 関数列の Fourier 変換は δ 関数列である" という興味ある事実を述べるものである. (7.16) から

$$\mathcal{F}\,\delta(x,l)=\frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-\frac{n}{l}\right)=\frac{1}{l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)$$

としてただちに得られる. ∎

[定理 15] 階段関数 $H(x,l)$ と δ 関数列 $\delta(x,l)$ についてつぎの関係式が成り立つ.

$$H(x+nl,l)=H(x,l)+n,\quad n=\text{整数} \tag{7.20}$$

$$H(x,l)+H(-x,l)=1, \tag{7.21}$$

$$H(ax,l)=\operatorname{sgn}a\,H\left(x,\frac{l}{|a|}\right)+H(-a), \tag{7.22}$$

$$\delta(x,l)=\delta(-x,l), \tag{7.23}$$

$$\delta(ax,l)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x,\frac{l}{|a|}\right). \tag{7.24}$$

（証明）　定理 14 で与えた $H(x,l)$ と $\delta(x,l)$ の Fourier 展開式を使えばただちに得られる．もちろん，定義 7 にもとづいて直接証明することもできる．（読者の演習問題とする．）∎

§8.　Fourier 級数の計算

Fourier 級数は，ふつう三角関数を使って

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{8.1}$$

のように書き表わされる．ふつうの意味では，右辺の無限級数は

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

のことである．$\cos nx=(e^{nix}+e^{-nix})/2$，$\sin nx=(e^{nix}-e^{-nix})/2i$ を使い，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}a_0=c_0,\\&\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=c_n,\\&\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=c_{-n},\end{aligned}\quad (n=1,2,\cdots)\right\} \tag{8.2}$$

とおくと，(8.1) は

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{nix} \tag{8.3}$$

となる．すなわち，指数関数 e^{nix} を使った**複素型**の表示では無限級数の部分和を $\sum_{n=-N}^{N}$ のように対称的にとることが必要だったのである．

ところが，超関数の Fourier 級数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{nix} \tag{8.4}$$

は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{nix}\overset{\text{def}}{=}c_0+\left[\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{nix}\right]_++\left[\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-nix}\right]_- \tag{8.5}$$

で定義されるものであって，右辺の無限級数が収束しさえすれば存在する．そしてその収束性は $\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}\leqq 1$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_{-n}|^{1/n}\leqq 1$ という きわめてゆるい条件の

もとに保証される．そこで，今後，三角関数を使った (8.1) の表示にも**超関数の無限級数**という意味づけを行なうことにして，超関数 $f(x)$ の Fourier 展開式として (8.4) のほかに (8.1) も使うことにしよう．すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)e^{nix}\right]_+ + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)e^{-nix}\right]_- \tag{8.6}$$

と定義するのである．(8.6) の右辺の O.F. をとると，ふつうの Fourier 級数として左辺が得られることを注意しよう．

以上では，簡単のために周期が $l=2\pi$ のばあいを考えた．(そのため，$e^{jx/l}$ の代りに e^{ix} が現われた．) 一般に，周期 l の周期超関数 $f(x)$ は定理 11 によれば

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{njx/l}, \tag{8.7}$$

$$c_n = \frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right), \tag{8.8}$$

$$g_0(\xi) = \mathcal{F}f_0(x) = \int_{x_0}^{x_0+l} f(x)e^{-j\xi x}dx, \tag{8.9}$$

$$f_0(x) = f(x)H(x;x_0,x_0+l) \tag{8.10}$$

のように Fourier 級数に展開される．もしも (8.1) の形に展開したければ，(8.2) の関係によって a_n, b_n を c_n から求めればよい．すなわち

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, \\ a_n &= c_n + c_{-n},\quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n=1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

を使えばよいのである．

いま，$f(x)$ が偶超関数であるとする．定理 5.5 によれば $g(\xi)=\mathcal{F}f(x)$ も偶超関数である．さらに $f(x)$ が周期超関数であるとすると，$f(x)$ を 1 周期だけ考えた超関数 $f_0(x)=f(x)H(x;x_0,x_0+l)$ の Fourier 変換 $g_0(\xi)=\mathcal{F}f_0(x)$ も偶超関数（実は偶の**整関数**）であることがつぎのように証明される．

$$\begin{aligned} g_0(-\xi) &= \int_{x_0}^{x_0+l} f(x)e^{j\xi x}dx \\ &= -\int_{-x_0}^{-x_0-l} f(-x)e^{-j\xi x}dx \\ &= \int_{-x_0-l}^{-x_0} f(x)e^{-j\xi x}dx \\ &= g_0(\xi). \end{aligned}$$

ただし，第 2 行を得るには積分変数を $x\to -x$ のように変換し，第 3 行を得る

には $f(-x)=f(x)$ の関係を使う．第3行は $f(x)$ の1周期 $(-x_0-l, -x_0)$ についての積分であるから $g_0(\xi)$ を与えるのである．

同様にして，$f(x)$ が奇超関数のばあいには $g_0(\xi)$ も奇超関数（実は奇の整関数）であることがわかる．

したがって，(8.8) によれば，$f(x)$ が偶超関数のばあい $c_n=c_{-n}$ となり，(8.11) によって $b_n=0$ である．また，奇超関数のばあいには，$c_n=-c_{-n}$ となり，$a_n=0$ である．こうして，つぎの定理が得られる．

[定理 16]　偶の周期超関数は **Fourier 余弦級数**に展開される：

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{l}. \tag{8.12}$$

また，奇の周期超関数は **Fourier 正弦級数**に展開される：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nx}{l}. \tag{8.13}$$

以下の諸例では，区間 (x_0, x_0+l) に対する $f(x)$ の値が与えられているが，これを周期 l の周期超関数とみなしたときの Fourier 展開式を求めるのである．

例 9　$f(x)=x,\ 0<x<l$

(8.9) により

$$\begin{aligned} g_0(\xi)&=\int_0^l xe^{-j\xi x}dx, \quad -j\xi x=t \text{ とおく} \\ &=\frac{1}{(j\xi)^2}\int_0^{-jl\xi}te^t dt \\ &=\frac{1}{(j\xi)^2}\Big[(t-1)e^t\Big]_0^{-jl\xi} \\ &=\frac{1}{(j\xi)^2}\{1-(1+jl\xi)e^{-jl\xi}\}. \end{aligned}$$

したがって，(8.8) により

$$c_n=\frac{1}{l}g_0\left(\frac{n}{l}\right)=\begin{cases}-\dfrac{l}{nj}, & n\neq 0\\[2mm] \dfrac{l}{2}, & n=0.\end{cases}$$

(8.11) により

$$a_0=l,$$
$$a_n=0, \quad b_n=-l/n\pi, \quad (n=1,2,\cdots).$$

したがって

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi nx}{l}. \tag{8.14}$$

とくに $x=l/4$ とおけば，(8.14) から

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{8.15}$$

が得られる．

例 10 $f(x)=x^2,\quad -\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}$

$$g_0(\xi)=\int_{-l/2}^{l/2}x^2e^{-j\xi x}dx,\quad -j\xi x=t \text{ とおく}$$

$$=\frac{1}{(j\xi)^3}\Big[(t^2-2t+2)e^t\Big]_{-jl\xi/2}^{jl\xi/2}.$$

$$\therefore\quad g_0\left(\frac{n}{l}\right)=\frac{l^3}{(jn)^3}\Big[(t^2-2t+2)e^t\Big]_{-n\pi i}^{n\pi i}$$

$$=\frac{(-1)^n l^3}{2\pi^2n^2},\quad n\neq 0.$$

また，$n=0$ に対しては

$$g_0(0)=\int_{-l/2}^{l/2}x^2dx=\frac{l^3}{12}.$$

したがって

$$c_0=\frac{l^2}{12},$$

$$c_n=\frac{(-1)^n l^2}{2\pi^2n^2},\quad n\neq 0$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{(-1)^n l^2}{\pi^2n^2},\quad b_n=0,\quad (n=1,2,\cdots)$$

したがって

$$f(x)=\frac{l^2}{12}+\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{l}. \tag{8.16}$$

とくに $x=0$ とおけば，(8.16) から

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12} \tag{8.17}$$

が得られる．また，$x=l/2$ とおけば

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \tag{8.18}$$

が得られる．

別法 以上は，ふつうの Fourier 級数の計算法と本質的に異なるものではない．Fourier 級数が超関数であることを考慮すると，つぎのような計算法も可能である．

いま考える周期超関数 $f(x)$ は $x=l/2+nl$ ($n=0,\ \pm1,\cdots$) に特異性をもつ．そこで，1 周期の区間の両端で $f(x)$ が正則になるように基礎の区間 $(0,l)$ を選ぶと，そこでは $f(x)$ は

$$f(x)=x^2H\left(-x+\frac{l}{2}\right)+(x-l)^2H\left(x-\frac{l}{2}\right) \tag{8.19}$$

のように表わされる．この右辺の $(x-l)^2$ を展開して整理すると，$f(x)$ はつぎのように書きかえられる：

$$f(x)=x^2-2l\left(x-\frac{l}{2}\right)H\left(x-\frac{l}{2}\right). \tag{8.20}$$

これから

$$f'(x)=2x-2l\,H\left(x-\frac{l}{2}\right),$$

$$f''(x)=2-2l\,\delta\left(x-\frac{l}{2}\right). \tag{8.21}$$

ただし，$H'(x)=\delta(x)$，$x\delta(x)=0$ という関係を使う．(8.21) は $f(x)$ の 1 周期 $(0, l)$ だけを考えたときの表式である．x の全区間では，δ 関数の代りに δ 関数列を使った等式：

$$f''(x)=2-2l\,\delta\left(x-\frac{l}{2}, l\right) \tag{8.22}$$

が成り立つはずである．δ 関数列の Fourier 展開式 (7.17) を使うと，(8.22) は

$$f''(x)=-4\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left\{\frac{2\pi n}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right\}$$

$$=-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{2\pi nx}{l}$$

となる．これを x に関して 2 回積分すれば

$$f(x)=c_0+cx+\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{l} \tag{8.23}$$

が得られる．ただし，c_0, c は積分定数である．$f(x)$ は周期超関数であるから，$c=0$ でなければならない．また c_0 は Fourier 展開式の定数項として，前と同様

$$c_0=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2}x^2dx=\frac{l^2}{12}$$

のように求められる．それゆえ，(8.23) は (8.16) となる．

例 9 についても同じ計算を試みることを読者諸氏におすすめする．

Fourier 展開式の定数項は $c_0=g_0(0)/l$ で与えられる．$g_0(\xi)$ は ξ の整関数であるから，具体的に $g_0(\xi)$ の関数形を求めた上で $g_0(0)$ の値を見出すことができる．しかし，例 9 の $g_0(\xi)$ の表式からもわかるように，いきなり $\xi=0$ とおくことができないばあいがあるので，c_0 の計算はむしろ直接 $c_0=(1/l)\int_{x_0}^{x_0+l}f(x)dx$ による方が便利である．また，Fourier 係数 c_n を見出すことだけが必要であるならば，$g_0(\xi)$ の関数形を決定する前の段階で $g_0(n/l)$ を計算するのが簡単である．例 10 ではそうしている．実は，これがふつうの Fourier 係数の計算法である．

例 10 と同様の方法でつぎの例 11，例 12 の結果が得られる．

例 11　$f(x)=|x|,\quad -\dfrac{l}{2}<x<\dfrac{l}{2}$

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\left\{(2m+1)\frac{2\pi x}{l}\right\}.$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

例 12　$f(x)=\sin x,\quad -\dfrac{l}{2}<x<\dfrac{l}{2}$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left\{(2m+1)\frac{2\pi x}{l}\right\}.$$

例 13　$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<a\\ 0, & a<x<l\end{cases}$

$$f(x)=H(x,l)-H(x-a,l)$$

$$=\frac{a}{l}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1-\cos\frac{2\pi na}{l}\right)\sin\frac{2\pi nx}{l}+\sin\frac{2\pi na}{l}\cos\frac{2\pi nx}{l}\right\}.$$

この結果は例10と同様の方法で得られるが，階段関数 $H(x,l)$ の Fourier 展開式(7.15)を使えばもっと簡単である．

例 14　つぎの関係が成り立つ．

$$\text{H.F.}\operatorname{cosec} z=-j\{\delta(x,2\pi)-\delta(x-\pi,2\pi)\},$$

$$\text{H.F.}\sec z=-j\left\{\delta\left(x+\frac{\pi}{2},2\pi\right)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2},2\pi\right)\right\},$$

$$\text{H.F.}\tan z=-j\delta\left(x-\frac{\pi}{2},\pi\right),$$

$$\text{H.F.}\cot z=-j\delta(x,\pi).$$

$\operatorname{cosec} z=1/\sin z$ は周期 2π の周期関数で，$z=n\pi$（$n=$整数）に1位の極をもつ．$z=n\pi$ の近くでは

$$\frac{1}{\sin z}\sim\frac{(-1)^n}{z-n\pi}=-(-1)^n j\delta(z-n\pi).$$

ただし，$\delta(z)=-(jz)^{-1}$ は $\delta(x)$ の母関数である．したがって

$$\text{H.F.}\operatorname{cosec} z=-j\{\sum_{n=\text{偶}}\delta(x-n\pi)-\sum_{n=\text{奇}}\delta(x-n\pi)\}$$

$$=-j\{\delta(x,2\pi)-\delta(x-\pi,2\pi)\}.$$

つぎに，

$$\text{H.F.}\sec z=\text{H.F.}\operatorname{cosec}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-j\left\{\delta\left(x+\frac{\pi}{2},2\pi\right)-\delta\left(x+\frac{\pi}{2}-\pi,2\pi\right)\right\}$$

$$=-j\left\{\delta\left(x+\frac{\pi}{2},2\pi\right)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2},2\pi\right)\right\}.$$

H.F. $\tan z$，H.F. $\cot z$ についても同様に計算できる．

あるいはつぎのようにしてもよい．定理 13 の (7.11) 式で $l=\pi$ とおけば，ただちに H.F. $\cot z=-j\delta(x,\pi)$ が得られる．ここで $z\to z-\pi/2$ とおきかえると，H.F. $\tan z=j\delta(x-\pi/2,\pi)$ が得られる．つぎに

$$\tan z+\cot z=\frac{2}{\sin 2z}$$

に注意すれば

$$\text{H.F.}\frac{1}{\sin 2z}=-\frac{j}{2}\left\{\delta(x,\pi)-\delta\left(x-\frac{\pi}{2},\pi\right)\right\}$$

が得られる．ここで $z\to z/2$ とおきかえ，定理 15 の (7.24) の関係を使うと，H.F. cosec z に対する式になる．

§9.　上(下)超関数の Fourier 級数

周期超関数 $f(x)$ の Fourier 級数を具体的に計算するばあい，$f(x)$ を上超関数と下超関数に分解して考えるのが便利である．その際つぎの簡単な定理がしばしば有用である．

[定理 17]　周期 l の周期超関数 $f(x)$ は

$$f(x)=f_+(x)+f_-(x) \tag{9.1}$$

のように表わすことができる．ここに

$$f_+(x)=[f_+(x)]_+,\quad f_-(x)=[f_-(x)]_- \tag{9.2}$$

であって，

$$f_+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{nj\pi z/l},\quad f_-(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-nj\pi z/l} \tag{9.3}$$

はそれぞれ Im $z>0$, Im $z<0$ で正則である．上(下)超関数 $f_\pm(x)$ の Fourier 級数は (9.3) の z を x でおきかえたもので与えられる．また，$a>0$ とすれば

$$f_+(x+ai)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{-2\pi na/l}\cdot e^{nj\pi x/l}, \tag{9.4}$$

$$f_-(x-ai)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-2\pi na/l}\cdot e^{-nj\pi x/l} \tag{9.5}$$

という Fourier 展開式が成り立つ．

（証明）　明らかである．読者にまかせる．∎

$f_+(x), f_-(x)$ はそれぞれ**上超関数**および**下超関数**である．これらは一般に特異点をもつ．しかし $f_+(x+ai), f_-(x-ai)$ は x の解析関数であるというのが重要な点である．$f_+(x+ai), f_-(x-ai)$ はふつうの意味で Fourier 級数に展開されるが，その Fourier 級数で $a=0$ とおいたものは，超関数 $[f_+(x)]_+, [f_-(x)]_-$

の Fourier 展開式である．解析関数 $f_+(z)$, $f_-(z)$ の引数 z を x でおきかえたものは O.F.$f_+(x)$, O.F.$f_-(x)$ ではあるが，超関数 $[f_+(x)]_+$, $[f_-(x)]_-$ そのものでは**ない**ことに注意しなければならない．(O.F. は必ずしも存在しない！)
とくに $f_+(z)$, $f_-(z)$ が 1 価解析関数のばあいには

$$[f_+(x)]_+ = f_+(x)_{\text{H.F.}} + \frac{1}{2}\text{H.F.}f_+(z), \tag{9.6}$$

$$[f_-(x)]_- = f_-(x)_{\text{H.F.}} - \frac{1}{2}\text{H.F.}f_-(z) \tag{9.7}$$

と表わすことができる．ただし，右辺の $f_\pm(x)_{\text{H.F.}}$ は $f_\pm(z)$ を見直した超関数である．

例 15　$\hat{F}(z) = \cot\frac{z}{2}$

このばあい，$f_+(z) = \cot\frac{z}{2}$, $f_-(z) = \cot\frac{z}{2}$ である．

$$f_+(z) = i\frac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1} = i\left(1-\frac{2}{1-e^{iz}}\right) = i\left(1-2\sum_{n=0}^{\infty}e^{niz}\right).$$

$$\therefore\quad f_+(x+ai) = i\left(1-2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-na}\cdot e^{nix}\right). \tag{9.8}$$

一方，

$$\begin{aligned} f_+(x+ai) &= \frac{\cos\{(x+ai)/2\}}{\sin\{(x+ai)/2\}} \\ &= \frac{\cos\{(x+ai)/2\}\sin\{(x-ai)/2\}}{\sin\{(x+ai)/2\}\sin\{(x-ai)/2\}} \\ &= \frac{\sin x-\sin ai}{\cos ai-\cos x} = \frac{\sin x-i\sinh a}{\cosh a-\cos x}. \end{aligned}$$

これを上の展開式と比較して，実数部と虚数部に分解すると

$$\frac{\sin x}{\cosh a-\cos x} = 2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-na}\sin nx, \tag{9.9}$$

$$\frac{\sinh a}{\cosh a-\cos x} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-na}\cos nx \tag{9.10}$$

が得られる．これらは $a>0$ に対して成り立つ．上で述べたように，ここでいきなり $a=0$ とおくことはできない．

$a=0$ に対する公式を得るには，(9.6) を使えばよい．

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \cot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{H.F.}\{-2j\,\delta(z,2\pi)\} \\ &= \cot\frac{x}{2}-j\,\delta(x,2\pi). \end{aligned}$$

ただし，(7.11) の関係式で $l=2\pi$ としたものを使う．

このの $f_+(x)$ が (9.8) の右辺で $a=0$ とおいたものに等しいのである．そこで，実数部と虚数部に分けると

$$\cot\frac{x}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \tag{9.11}$$

$$\delta(x, 2\pi) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \tag{9.12}$$

が得られる．(9.12) は (7.17) としてすでに知られた結果である．]

例 16　つぎの展開式を導け．

$$\operatorname{cosec} x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \sin(2n+1)x,$$

$$\sec x = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n+1)x,$$

$$\tan\frac{x}{2} = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx.$$

$\tan x/2 = -\cot\{(x+\pi)/2\}$ に注意し，(9.11) を使えば，$\tan x/2$ の展開式が得られる．つぎに，$\operatorname{cosec} x = \{\tan x/2 + \cot x/2\}/2$ に注意すれば $\operatorname{cosec} x$ の展開式が得られる．最後に，$\sec x$ の展開式を得るには，$\sec x = \operatorname{cosec}(x+\pi/2)$ を使えばよい．

例 17　つぎの展開式を導け．

$$\log(1-2t\cos x+t^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\cos nx, \quad |t|<1$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{t\sin x}{1-t\cos x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\sin nx, \quad |t|<1$$

$$\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos nx,$$

$$\log\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cos nx,$$

$$\log\left|\cot\frac{x}{2}\right| = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

いま

$$\varphi(z) = \operatorname{Log}(1-e^{iz}) \tag{9.13}$$

を考える．特異点は $z=n\pi$ (n=整数) だけであるから，$\varphi(z)$ は $\operatorname{Im} z>0$ で正則，したがってこれを定理 17 の $f_+(z)$ に選ぶことができる．$\operatorname{Im} z>0$ に対して $|e^{iz}|<1$ であるから，(9.13) は

$$\varphi(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{niz}, \quad \operatorname{Im} z>0 \tag{9.14}$$

のように展開できる．これは (9.3) の第 1 式に相当する．

まず，(9.4) に相当して

$$\varphi(x+ai) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} e^{nix}, \quad t=e^{-a}<1 \tag{9.15}$$

である．ところが，$a>0$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(x+ai) &= \operatorname{Log}(1-e^{-a}\cdot e^{ix}) = \operatorname{Log}(1-te^{ix}) \\ &= \operatorname{Log}\{(1-t\cos x)-it\sin x\} \\ &= \frac{1}{2}\log(1-2t\cos x+t^2) - i\tan^{-1}\frac{t\sin x}{1-t\cos x}\end{aligned} \tag{9.16}$$

のように変形できる．そこで，(9.15) と (9.16) を比較すれば，証明すべき最初の 2 つの式が得られる．

つぎに，$a\to 0$ (すなわち $t\to 1$) の極限を考える．このとき，(9.15) の右辺の極限は Fourier 級数として確かに 1 つの超関数を表わす．また，左辺は $[\varphi(x)]_+$ になる．すなわち

$$[\varphi(x)]_+=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{nix}. \tag{9.17}$$

さて，(9.13) を (7,9), (7,10) と比較すれば ($l=2\pi$ とおく)

$$\varphi(z)=\log\left\{2\sin\left(\frac{-z}{2}\right)\right\}+\frac{i}{2}(z+\pi),\quad \mathrm{Im}\,z>0 \tag{9.18}$$

が得られる．この式について $[\varphi(x)]_+$ を考える．$[\varphi(x)]_+$ は周期 2π の周期超関数であるから，$-\pi<x\leqq\pi$ について考えれば十分である．さて，$x\neq 0$ に対しては

$$[\varphi(x)]_+=\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)-\pi iH(x)+i\frac{(x+\pi)}{2},\quad 0<|x|\leqq\pi$$

であることが容易にわかる．x に関する制限を除くには，$H(x)$ を $H(x,2\pi)$ でおきかえればよい．すなわち

$$[\varphi(x)]_+=\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)-\pi i\left\{H(x,2\pi)-\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{2}\right\} \tag{9.19}$$

である．(9.19) の複素共役をとると，(7.4.3) により，

$$[\bar{\varphi}(x)]_-=\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)+\pi i\left\{H(x,2\pi)-\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{2}\right\} \tag{9.20}$$

が得られる．(9.19), (9.20) の和と差をつくれば

$$\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)=\frac{1}{2}\{[\varphi(x)]_++[\bar{\varphi}(x)]_-\}, \tag{9.21}$$

$$H(x,2\pi)=\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}-\frac{1}{j}\{[\varphi(x)]_+-[\bar{\varphi}(x)]_-\} \tag{9.22}$$

が導かれる．右辺は超関数として明確な意味をもつから，左辺は，右辺によって定義される超関数と考えることができる．$H(x,2\pi)$ はすでに定義 7 で定義されている．これに反して $\log(2|\sin x/2|)$ は (9.21) ではじめて定義されたものである．(9.21) の右辺に (9.17) を代入すれば，

$$\log\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx \tag{9.23}$$

が得られる．これは証明すべき第 3 式である．ここで x の代りに $x+\pi$ とおけば，$\log(2|\cos x/2|)$ の展開式が得られる．それと (9.23) の差をとれば $\log|\cot x/2|$ が得られるのである．

§ 10.　Fourier 係数 c_n の $|n|\to\infty$ でのふるまい

任意に与えられた周期超関数 $f(x)$ の Fourier 展開の係数 c_n を具体的に求めることは，一般的にいってむずかしい問題である．n の小さい値に対しては数

値計算によって c_n を求めることも可能であるが，n が大きくなるとそれも実行不可能になる．このようなばあい，$|n|\to\infty$ に対する c_n の漸近的ふるまいが簡単に調べられるということになると非常にありがたい話であろう．

(8.7)〜(8.10) の諸式で示されるように，Fourier 係数 c_n は，$f(x)$ を1周期だけ考えた超関数 $f_0(x)=f(x)H(x;x_0,x_0+l)$ の Fourier 変換 $g_0(\xi)=\mathcal{F}f_0(x)$ を使って表わされる．すなわち，$c_n=g_0(n/l)/l$ である．したがって，$|n|\to\infty$ での c_n のふるまいを知るには，$|\xi|\to\infty$ での $g_0(\xi)$ のふるまいがわかればよい．ところが，Fourier 変換の漸近的ふるまいについてはすでに任意の超関数について一般的に議論されている．それゆえ，単にその結果を使えばよいのである．こうして，定理 9.10 を周期超関数のばあいについていいかえたつぎの定理が成り立つ．

[定理 18]　$p_m^{(N)}(x)$ は $x=x_m$ のみを特異点とし，無限遠ですなおな超関数とする．いま，$f(x)$ は周期 l の周期超関数で，その1周期 $[x_0,x_0+l)$ の中で $x=x_m(m=1,2,\cdots,M)$ を除けば正則であって，$x=x_m$ を含むある区間で $f^{(N)}(x)-p_m^{(N)}(x)$ は絶対積分可能とする．このとき，$f(x)$ の Fourier 係数 c_n について，$|n|\to\infty$ のとき

$$c_n=\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{M}q_m\left(\frac{n}{l}\right)+o(|n|^{-N}) \tag{10.1}$$

が成り立つ．ただし，$q_m(\xi)=\mathcal{F}p_m(x)$ とする．

（証明）　$f_0(x)=f(x)H(x;x_0,x_0+l)$ とすれば，$f_0(x)$ の特異点は $x=x_m$ $(m=1,2,\cdots,M)$ および $x=x_0$, $x=x_0+l$ である．また，$f_0(x)$ は $|x|\to\infty$ で恒等的に 0 であるから，$f_0^{(N)}(x)$ はもちろん無限遠で絶対積分可能，したがって無限遠ですなおである．したがって，定理 9.10 の仮定がすべて満たされているから，$g_0(\xi)=\mathcal{F}f_0(x)$ について (10.1) の形の漸近的性質が成り立つ．残る問題は2つの特異点 $x=x_0$, $x=x_0+l$ である．これらの2点で $f(x)$ は正則で，かつ $H(x;x_0,x_0+l)=H(x-x_0)-H(x-x_0-l)$ であるから，$f_0(x)$ はその2点で $f(x)H(x-x_0)$, $-f(x)H(x-x_0-l)$ と同じ特異性をもつ．$f(x)$ の周期性により，後者は $-f(x-l)H(x-l-x_0)$ と書き表わされる．いま $f(x)$ を $x-x_0$ のベキ級数に展開し，適当な項数 n で打ち切ったものを $P_n(x)$ とし，$p_0(x)\equiv P_n(x)H(x-x_0)$ とおけば，$f_0(x)$ は $x=x_0$ および $x=x_0+l$ の近傍でそれぞれ $p_0(x)$, $-p_0(x-l)$ によって任意の精度で近似されることになる．$p_0^{(N)}(x)$ はもちろん無限遠ですなおである．さて，$\mathcal{F}p_0(x)=q_0(\xi)$ とすれば

$$\mathcal{F}\{-p_0(x-l)\}=-e^{-jl\xi}q_0(\xi).$$

したがって，$f_0(x)$ の 2 点 $x=x_0$, $x=x_0+l$ での特異性によって (10.1) の右辺につけ加わる項は

$$\frac{1}{l}\left\{q_0\left(\frac{n}{l}\right)-e^{-jl\cdot n/l}q_0\left(\frac{n}{l}\right)\right\}$$

であるが，$e^{-nj}=1$ であるから，たがいに打ち消しあって 0 となる．すなわち，(10.1) がそのまま成り立つ．∎

例 18 $f(x)=\sqrt{1-|\cos x|}$

これは周期 π の周期関数で，かつ偶関数である．したがって $f(x)=\sum a_n\cos 2nx$ の形に展開される．ただし，$a_n=c_n/2$ である．$f(x)$ の特異点は $\cos x=0$ および $|\cos x|=1$ となる点である． 1 周期の区間として $(x_0, x_0+\pi)$ （ただし $-\pi/2<x_0<0$）を考えると，その中での特異点は $x=0, \pi/2$ である．

$x=0$ の近くでは

$$\begin{aligned}f(x) &= \left\{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots\right)\right\}^{1/2}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}|x|\left\{1-\frac{1}{12}x^2+\cdots\right\}^{1/2}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|x|-\frac{1}{24}|x|^3+O(x^5)\right\}.\end{aligned} \tag{10.2}$$

また，$x=\pi/2$ の近くでは

$$f(x)=1-\frac{1}{2}|\cos x|-\frac{1}{8}(\cos x)^2-\frac{1}{16}|\cos x|^3+\cdots.$$

$x-\pi/2=t$ とおけば

$$|\cos x|=|\sin t|=\left|t-\frac{1}{6}t^3+\cdots\right|=|t|\left(1-\frac{1}{6}t^2+\cdots\right)$$

であるから，特異性をもつ項だけを拾うと

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{2}|t|\left(1-\frac{1}{6}t^2+\cdots\right)-\frac{1}{16}|t|^3+\cdots\\ &=-\frac{1}{2}\left\{|t|-\frac{1}{24}|t|^3+O(t^5)\right\},\quad t=x-\frac{\pi}{2}.\end{aligned} \tag{10.3}$$

(10.2), (10.3) の右辺で $O(x^5)$, $O(t^5)$ をとり除いたものをそれぞれ定理 18 の $p_1(x)$, $p_2(x)$ とすると，$N=5$ である．Fourier 変換の表から，n が奇数のとき

$$\mathcal{F}|x|^n=\mathcal{F}\{x^n\operatorname{sgn}x\}=2\frac{n!}{(j\xi)^{n+1}}$$

であることがわかる．したがって

$$\begin{aligned}q_1(\xi) &= \sqrt{2}\left\{\frac{1}{(j\xi)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(j\xi)^4}\right\},\\ q_2(\xi) &= -e^{-j(\pi/2)\xi}\left\{\frac{1}{(j\xi)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(j\xi)^4}\right\}.\end{aligned}$$

$l=\pi$ に注意して，$j\xi=j\cdot(n/\pi)=2ni$ を代入すれば，(10.1) は

$$c_n=\frac{1}{\pi}\left\{\sqrt{2}-(-1)^n\right\}\left\{-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{64}\frac{1}{n^4}\right\}+o(|n|^{-5})$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\{\sqrt{2}-(-1)^n\}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right\} \tag{10.4}$$

となる．(10.4) の誤差の項が $o(|n|^{-5})$ ではなくて $O(n^{-6})$ となっているのは，(10.2)，(10.3) の右辺の $O(x^5)$，$O(t^5)$ の項の寄与を考慮した結果である．

例 19　$f(x)=|x|^{1/2}\operatorname{sgn}x,\ -\dfrac{l}{2}<x<\dfrac{l}{2}$

で与えられる周期 l の周期超関数は Fourier 正弦級数 $\sum b_n\sin(2n\pi x/l)$ として表わされる．b_n の漸近形は

$$b_n=\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{2l}}{\pi n}+\frac{\sqrt{l}}{2\pi n^{3/2}}+O(n^{-3})$$

である．

例 20　$f(x)=|x|\log|x|,\ -1<x<1$

で与えられる周期 2 の周期超関数は Fourier 余弦級数 $\sum a_n\cos n\pi x$ として表わされる．a_n の漸近形は

$$a_n=\frac{2}{\pi^2n^2}\{\log\pi n-\psi(2)+(-1)^n\}+O(n^{-4})$$

である．

上の 2 例は Lighthill の本にそれぞれ例題 45 および問題 18 として挙げられている．読者の演習問題とする．

§11.　左(右)階段関数と左(右) δ 関数列

定義 7 で導入した $H_\pm(x,l)$，$\delta_\pm(x,l)$ は階段関数 $H(x,l)$，δ 関数列 $\delta(x,l)$ を定義するために使うだけで，以後の議論にはまったく現われなかった．ただ，$H_\pm(x,l)$，$\delta_\pm(x,l)$ という超関数が確かに存在するという事実を述べるために使っただけで，それらの母関数が具体的にどんな形をもつのかなどはいっさい不要であった．しかし，Γ 関数の知識があれば，それら母関数を具体的に与えることができるので，念のためにこれを以下に示そう．

[定理 19]　周期 l の右(左)階段関数 $H_\pm(x,l)$ および右(左) δ 関数列 $\delta_\pm(x,l)$ の母関数は，それぞれ

$$H_\pm(z,l)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{j}\log\Gamma\left(1\mp\frac{z}{l}\right), \tag{11.1}$$

$$\delta_\pm(z,l)\overset{\text{def}}{=}\frac{d}{dz}H_\pm(z,l)=\mp\frac{1}{jl}\psi\left(1\mp\frac{z}{l}\right) \tag{11.2}$$

で与えられる．

（証明） $\Gamma(z)$ は $z=-n\ (n=0,1,2,\cdots)$ に1位の極をもち，それ以外ではいたるところ正則で，かつ零点をもたないことが知られている．したがって，$\Gamma(1-z/l)$ は $z=nl(n=1,2,\cdots)$ に1位の極をもつ以外は z 平面いたるところで正則である．そこで，(11.1) の対数関数として，x 軸上の $-\infty<x<l$ で実数値をとるような分枝をとることにすると，$H_+(z,l)$ は $\mathrm{Im}\,z>0$ および $\mathrm{Im}\,z<0$ で正則な1価解析関数となり，母関数としての資格をそなえていることになる．さて，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ の性質を使うと，任意の正の整数Nに対して

$$\Gamma\left(1-\frac{z}{l}\right)=\frac{\Gamma(N+1-z/l)}{(1-z/l)(2-z/l)\cdots(N-z/l)} \tag{11.3}$$

と書けるから

$$H_+(z,l)=-\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{N}\log\left(n-\frac{z}{l}\right)+\frac{1}{j}\log\Gamma\left(N+1-\frac{z}{l}\right) \tag{11.4}$$

である．$H(z)=-j^{-1}\,\mathrm{Log}\,(-z)$ に注意し，さらに $\log\Gamma(N+1-z/l)$ が x 軸上の半直線 $-\infty<x<(N+1)l$ の上で正則であることを考慮すると，半直線 $-\infty<x<(N+1)l$ を含む領域で

$$H_+(z,l)\cong\sum_{n=1}^{N}H(z-nl).$$

$$\therefore\quad \mathrm{H.F.}H_+(z,l)=\sum_{n=1}^{N}H(x-nl)$$

であることがわかる．整数Nはどんなに大きくとってもよいから，上の式は，けっきょく

$$\mathrm{H.F.}\,H_+(z,l)=\sum_{n=1}^{\infty}H(x-nl)\equiv H_+(x,l) \tag{11.5}$$

を与えるのである．すなわち，$H_+(z,l)$ は $H_+(x,l)$ の母関数である．

つぎに，(7.4) から，

$$\begin{aligned}H_-(x,l)&=-H_+(-x,l)\\&=\mathrm{H.F.}\,H_+(-z,l)\qquad\because\ (11.5)\\&=\mathrm{H.F.}\,H_-(z,l).\end{aligned}$$

ただし，(11.1) の $H_+(z,l)$ の定義式を使った．これで $H_-(z,l)$ が $H_-(x,l)$ の母関数であることが証明された．

(11.1) を z について微分し，$\psi(z)=(d/dz)\log\Gamma(z)$ の関係を使ったのが (11.2) の右側の等式である．そして，(7.3)～(7.6) の定義から得られる関係：

$$\delta_\pm(x,l)=\frac{d}{dx}H_\pm(x,l) \tag{11.6}$$

を母関数で表わしたものが (11.2) の左側の等式である. ▮

[定理 20] つぎの関係が成り立つ.

$$H(z,l)=H_+(z,l)+H_-(z,l)+H\left(\frac{z}{l}\right)-j^{-1}\log 2\pi, \tag{11.7}$$

$$\delta(z,l)=\delta_+(z,l)+\delta_-(z,l)+\delta(z). \tag{11.8}$$

(証明) (11.1) と $H(z/l)=-j^{-1}\mathrm{Log}(-z/l)$ を使えば

$$\begin{aligned}
&H_+(z,l)+H_-(z,l)+H\left(\frac{z}{l}\right)-j^{-1}\log 2\pi\\
&=\frac{1}{j}\log\frac{\Gamma(1-z/l)\Gamma(1+z/l)}{2\pi(-z/l)}\\
&=\frac{1}{j}\log\frac{\Gamma(-z/l)\Gamma(1+z/l)}{2\pi}\\
&=\frac{1}{j}\log\frac{\pi}{2\pi\sin\pi(-z/l)}\\
&=-\frac{1}{j}\log\left\{2\sin\frac{\pi(-z)}{l}\right\}\\
&=H(z,l).
\end{aligned}$$

ただし, Γ 関数の関係式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

と (7.9) を使った. これで (11.7) が証明された. (11.7) を z について微分すれば, ただちに (11.8) が得られる. ▮

例 21 $a>0$ とすれば, つぎの関係が成り立つ.

$$H_\pm(ax,al)=H_\pm(x,l), \tag{11.9}$$

$$H_\pm(x,al)=H_\pm\left(\frac{x}{a},l\right) \tag{11.10}$$

$$\delta_\pm(ax,al)=a^{-1}\delta_\pm(x,l), \tag{11.11}$$

$$\delta_\pm(x,al)=a^{-1}\delta_\pm\left(\frac{x}{a},l\right). \tag{11.12}$$

(11.1) の定義式から, 明らかに $H_\pm(az,al)=H_\pm(z,l)$ である. これからただちに (11.9) が得られる. (11.9) を x について微分すれば, (11.11) が得られる. (11.9), (11.11) で $x\to x/a$ とおきかえたものが (11.10), (11.12) である. これらは, 左(右)階段関数と左(右) δ 関数列を異なる周期のものに帰着させる際に役立つ.

例 22 つぎの結果を導け.

$$\mathfrak{F}\delta_\pm(x,l)=\pm\frac{1}{2i}\cot\pi l\xi+\frac{1}{2l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)-\frac{1}{2}, \tag{11.13}$$

$$\mathcal{F}H_{\pm}(x,l)=\mp\frac{1}{4\pi\xi}\cot\pi l\xi-\frac{1}{2j\xi}+\frac{1}{2jl\xi}\circ\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)\mp\frac{1}{4}\delta(\xi), \tag{11.14}$$

$$\mathcal{F}\delta(x,l)=\frac{1}{l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right), \tag{11.15}$$

$$\mathcal{F}H(x,l)=\frac{1}{2}\delta(\xi)+\frac{1}{jl\xi}\circ\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right). \tag{11.16}$$

ただし

$$\frac{1}{\xi}\circ\delta(\xi,l)=-\delta'(\xi)+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{\delta(\xi-nl)-\delta(\xi+nl)\} \tag{11.17}$$

である．

まず $\mathcal{F}\delta_+(x,l)$ を求める．これが下超関数であることに注意する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\delta_+(x,l)&=\mathcal{F}\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-nl)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-njl\xi}=\left[\frac{e^{-jl\xi}}{1-e^{-jl\xi}}\right]_-\\&=\left[\frac{e^{-jl\xi/2}}{e^{jl\xi/2}-e^{-jl\xi/2}}\right]_-=\left[\frac{\cos\pi l\xi-i\sin\pi l\xi}{2i\sin\pi l\xi}\right]_-\\&=\left[\frac{1}{2i}\cot\pi l\xi-\frac{1}{2}\right]_-=\frac{1}{2i}[\cot\pi l\xi]_--\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned}[\cot\pi l\xi]_-&=\text{H.F.}\{\cot\pi l\zeta\cdot\mathbf{1}_-(z)\}=\text{H.F.}\left[\cot\pi l\zeta\cdot\left\{\mathbf{1}(z)-\frac{1}{2}\right\}\right]\\&=\cot\pi l\xi-\frac{1}{2}\text{H.F.}\left\{\frac{2}{il}\delta\left(\zeta,\frac{1}{l}\right)\right\}\qquad\because\ (7.11)\\&=\cot\pi l\xi+\frac{i}{l}\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right).\end{aligned} \tag{11.18}$$

これを上の式に入れると，(11.13) の上号のばあいが得られる．そこで，$\delta_-(x,l)=\delta_+(-x,l)$ を考慮すれば，ただちに下号のばあいが得られる．

(11.14) を得るには，§9.9 で述べた方法を使う．すなわち

$$\mathcal{F}H_+(x,l)=g(\xi) \tag{11.19}$$

とすれば，定理 5.7 により

$$j\xi g(\xi)=\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dx}H_+(x,l)\right\}=\mathcal{F}\delta_+(x,l)$$

である．ここで定理 3.21 を利用すれば

$$g(\xi)=\frac{1}{2ij\xi}\circ\cot\pi l\xi+\frac{1}{2jl\xi}\circ\delta\left(\xi,\frac{1}{l}\right)-\frac{1}{2j\xi}+C\delta(\xi). \tag{11.20}$$

ただし，Cは任意定数である．右辺の第 1 項は 1 価解析関数どうしの形式積であるから，これをふつうの積と見直すことができる．第 2 項はそうはいかない．実際，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}\circ\delta(\xi,l)&=\frac{1}{\xi}\circ\left[\delta(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\delta(\xi-nl)+\delta(\xi+nl)\}\right]\\&=\frac{1}{\xi}\circ\delta(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\xi}\circ\delta(\xi-nl)+\frac{1}{\xi}\circ\delta(\xi+nl)\right\}\end{aligned}$$

$$= -\delta'(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{nl}\{\delta(\xi-nl)-\delta(\xi)\}-\frac{1}{nl}\{\delta(\xi+nl)-\delta(\xi)\}\right]$$
$$= -\delta'(\xi)+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{\delta(\xi-nl)-\delta(\xi+nl)\}$$

である．これは (11.17) にほかならない．上の第 2 行から第 3 行に移る際に

$$\frac{1}{\xi}\circ\delta(x-a) = \text{H.F.}\left\{\frac{1}{\zeta}\delta(\zeta-a)\right\} = \text{H.F.}\left\{-\frac{1}{j}\frac{1}{\zeta(\zeta-a)}\right\}$$
$$= \begin{cases}\text{H.F.}[a^{-1}\{\delta(\zeta-a)-\delta(\zeta)\}], & a\neq 0\\ \text{H.F.}[-\delta'(z)], & a=0\end{cases}$$
$$= \begin{cases}a^{-1}\{\delta(\xi-a)-\delta(\xi)\}, & a\neq 0\\ -\delta'(\xi), & a=0\end{cases} \tag{11.21}$$

の関係を使っていることに注意しておこう．

さて，未定定数 C を定めるには，Fourier 変換の漸近的性質（定理 9.10）を利用する．

$$\mathcal{F}g(\xi) = H_+(-x,l) = -H_-(x,l)$$

である．$x\to+\infty$ に対してこれは 0 になる． ところが，無限遠の漸近的性質は $g(\xi)$ の特異性によってきまるはずである．特異点は $\xi=n/l\,(n=0,\pm1,\cdots)$ である．まず $\xi=0$ を考える．そこでは，(11.20) から，

$$g(\xi)\sim\frac{1}{j^2l\xi^2}-\frac{1}{2jl}\delta'(\xi)-\frac{1}{2j\xi}+C\,\delta(\xi)\equiv p_0(\xi),$$
$$q_0(x)\equiv\mathcal{F}p_0(\xi)=\frac{1}{j^2l}\cdot\pi ijx\,\text{sgn}\,x-\frac{1}{2jl}\cdot jx-\frac{1}{2j}(-\pi i\,\text{sgn}\,x)+C$$
$$=-\frac{1}{l}xH(-x)+\frac{1}{4}\,\text{sgn}\,x+C.$$

ただし，Fourier 変換の表を使う．$x\to+\infty$ で $q_0(x)\to0$ となるためには $C=-1/4$ でなければならない． これで (11.14) の上号の式が証明された．（その他の特異点 $\xi=nl\,(n\neq0)$ での特異性が C の決定には無関係であることは容易に確かめられる.）(11.14) の下号の式は $\mathcal{F}H_-(x,l)=-g(-\xi)$ から得られる．また，(11.15), (11.16) は

$$\mathcal{F}\delta(x,l)=\mathcal{F}\delta_+(x,l)+\mathcal{F}\delta_-(x,l)+\mathcal{F}\delta(x),$$
$$\mathcal{F}H(x,l)=\mathcal{F}H_+(x,l)+\mathcal{F}H_-(x,l)+\mathcal{F}H(x)$$

によって容易に導かれる．(11.15) はすでに (7.19) として与えられている結果である．

§12. ま　と　め

まず，母関数の中でとくに好ましい性質をもつものとして標準母関数の概念を導入した．つぎに，周期超関数に対して具体的に標準母関数を求め，これがふつうの周期関数のばあいの Fourier 級数に密接に関連することを知った． この事実に基づいて，Fourier 級数を超関数として定義した． その結果，周期超関数と Fourier 級数とを 同一視することが許され， Fourier 級数は何回でも項

別微分が可能になった.

つぎに，周期超関数の理論でもっとも基本的な役割をもつものとして階段関数 $H(x,l)$ と δ 関数列 $\delta(x,l)$ を導入した．ふつうの周期関数に対する Fourier 級数を求めるばあいでも，$H(x,l)$ や $\delta(x,l)$ を利用すれば計算が簡単になることを知った．また，$\operatorname{cosec} x$，$\tan x$ のような，ふつうの意味では Fourier 展開が許されないばあいについても，超関数としての Fourier 級数を具体的に計算した．最後に，Fourier 係数 c_n の $|n|\to\infty$ でのふるまいを知るための公式を導き，その使い方を簡単な例について示した.

索　　引

（立体数字はⅠ巻，斜体数字はⅡ巻）

著者略歴

今　井　　功
いま　い　　いさお

1936年　東京大学理学部物理学科卒業
1951年　朝日文化賞受賞
1959年　学士院恩賜賞受賞
1979年　文化功労者
1988年　文化勲章受章
現　在　東京大学名誉教授
　　　　工学院大学名誉教授
　　　　理学博士

主要著書
「流体力学」(岩波書店，1970)
「流体力学(前編)」(裳華房，1973)
「等角写像とその応用」(岩波書店，1979)
「バークレー物理学コース　力学」(丸善，1975)(監訳)
「演習　力　学」(サイエンス社，1981)(共著)
「複素解析と流体力学」(日本評論社，1989)
「電磁気学を考える」(サイエンス社，1990)

応用超関数論 I

1981年5月25日 ©　　初　版　発　行
1991年3月10日　　初版第5刷発行

著　者　今井　功　　発行者　森平勇三
　　　　　　　　　　印刷者　篠倉正信
　　　　　　　　　　製本者　関川　弘

発行所　　**株式会社　サイエンス社**
〒101　東京都千代田区神田須田町2丁目4番地
安部徳ビル
〔営業〕　☎(03)3256-1091(代)　振替　東京7-2387
〔編集〕　☎(03)3256-1093(代)

印刷　(株)ディグ　　製本　関川製本所

ISBN4-7819-0215-4

PRINTED IN JAPAN